

دراسات بكالوريوس التجارة فى المعاملات المالية والتجارية

رياضيات التأمينات العامة

مركز جامعة القاهرة
للتعليم المفتوح



تاليف

دكتور

ممدوح حمزة أحمد

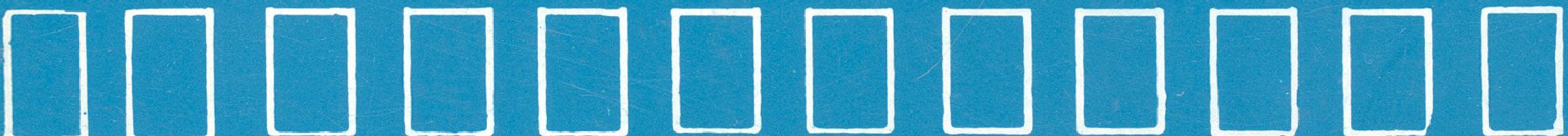
مدرس الرياضة والتامين
كلية التجارة - جامعة القاهرة

مراجعة

دكتور

إبراهيم محمد مرجان

استاذ الرياضة والتامين المساعد
كلية التجارة - جامعة القاهرة



رياضيات التأمينات العامة

تاليف

دكتور

ممدوح حمزة أحمد

مدرس الرياضة والتامين

كلية التجارة - جامعة القاهرة

مراجعة

دكتور

إبراهيم محمد مرجان

استاذ الرياضة والتامين المساعد

كلية التجارة - جامعة القاهرة

المحتويات

مقدمة :

تعتبر عملية التسعير من الأمور الهامة جداً سواء بالنسبة لشركات التأمين أو بالنسبة للمؤمن لهم نظراً لأنها الفيصل فى تحديد مدى العدالة السائدة بين الطرفين من ناحية ، ولإستمرار شركات التأمين فى أداء دورها بالنسبة للاقتصاد القومى من ناحية أخرى .

فبالنسبة لشركات التأمين فإن تحديد السعر العادل والمناسب يتيح لها سداد إلتزاماتها قبل حملة الوثائق والاستمرار فى مزاولة نشاطها .

وبالنسبة للمؤمن لهم فإن تحديد السعر العادل والمناسب يتيح لهم الحصول على التعويضات المناسبة فى حالة حدوث خسارة (نظراً لأن عدم كفاية القسط يترتب عليه عدم قدرة شركات التأمين على الوفاء بالالتزاماتها قبل المؤمن لهم وبالتالى عدم حصولهم على تعويض يتناسب مع الخسارة) . وفى نفس الوقت فإن السعر العادل والمناسب يعنى سداد تكلفة تتناسب مع العائد وبمعنى آخر تعادل إلتزامات الطرفين .

ولذلك فإننا نقدم هذا الكتاب كمرجع فى رياضيات التأمينات العامة لعله يفيد الباحثين والعاملين فى هذا المجال والذى تفتقر المكتبه العربية إليه ، والله الموفق .

المؤلف

الوحدة الدراسية الأولى

تحديد أسعار التأمينات العامة

الوحدة الدراسية الأولى

موضوعها : تحديد أسعار التأمينات العامة

هدفها : توضيح الشروط الواجب توافرها فى سعر التأمين ومعادلة حساب القسط الوحيد الصافى للتأمينات العامة .

عناصرها :

- الشروط الواجب توافرها في الأسعار
- معادلة حساب القسط الوحيد الصافى فى التأمينات العامة .

مقدمة :

لاتعتمد عملية تسعير التأمين على العرض والطلب أو على التكلفة التاريخية وذلك كما فى باقى السلع والخدمات الأخرى ولكن تقوم شركة أو شركات التأمين سواء منفردة أو مجتمعة فى شكل إتحاد أو هيئة بتحديد هذه الأسعار ، وفى بعض الدول تقوم هيئات الاشراف والرقابة على شركات التأمين بتحديد هذه الاسعار بحيث تتناسب مع تكلفة تقديم خدمة التأمين .

ولأن عملية تحديد سعر التأمين تعتبر الأساس لقيام التأمين ذاته فإن شركة التأمين تقوم بتحديد هذا السعر حيث نجد فى بعض الحالات أنها قد تكون شركة جديدة تمارس التأمين لأول مرة ولذلك فإنها تقوم بالاعتماد على أسعار شركات التأمين الأخرى التى تمارس التأمين منذ فترة طويلة ثم تقوم بتعديل هذه الأسعار بما يتناسب مع ظروفها وشروطها ، وإذا كانت الشركة تقوم بتحديد سعر التأمين لنوع جديد لم يتم تحديد سعر له من قبل فإنه يقع على عاتقها وضع سعر تحكمى judgement Basis أو إعطائه سعر نوع آخر من التأمين يكون أقرب مايكون منه من حيث معدلات التكرار وقيم الخسائر وفى كلتا الحالتين فإن الشركة تواجه باحتمال حدوث انحرافات كبيرة بين الخسائر الفعلية والخسائر المتوقعة خلال السنوات الأولى ثم تقوم بتعديل أسعارها وفقاً للخبرة ومع تزايد عدد الوحدات المؤمن عليها بمرور الوقت فإن النتائج الفعلية سوف تقترب من النتائج المتوقعة وبالتالى تستقر أوضاع الشركة .

الشروط الواجب توافرها فى الاسعار :

حتى تستطيع شركة التأمين أن تمارس دورها كمنظم أو وسيط بنجاح فإنه يجب أن تتعادل الاقساط المحصلة مع الالتزامات المدفوعة (التعويضات ، العمولات ، المصاريف الادارية ، عائد رأس المال).

ولذلك فإن هناك مجموعة من الشروط التى يجب توافرها فى سعر التأمين وهى

١- أن يكون السعر كافياً

٢- الا يكون السعر مبالغاً فيه

٣- أن يختلف السعر باختلاف درجة الخطورة

وفيما يلى توضيح لكل شرط من هذه الشروط بشيء من الايجاز .

١- أن يكون السعر كافياً :

يقصد بكفاية السعر أن يكون هذا السعر كافياً لتغطية جميع الالتزامات التى تقع على عاتق شركة التأمين المتمثلة فى التعويضات والعمولات والمصاريف الادارية وعائد رأس المال للمساهمين فإذا لم يكن السعر كافياً ترتب على ذلك عدم قدرة الشركة على الوفاء بالتزاماتها وبالتالى عدم قدرتها على سداد تعويض كامل للمستأمن ، وهذا يعنى أن عدم كفاية السعر تضر بكلا الطرفين : المستأمن والمؤمن وهذا يؤدى فى النهاية بالتأثير سلباً على المجتمع .

٢- ألا يكون السعر مبالغاً فيه :

يعتبر هذا الشرط من الأهمية بمكان لأنه يترتب على عدم توافره نتائج خطيرة ، فإذا كان السعر مبالغاً فيه أى أكبر من اللازم فإن هذايعنى تحقيق المؤمن لأرباح غير عادية كما أن المبالغة فى السعر يترتب عليها مايلى :

٢/١ - تحول طالب التأمين إلى شركة تأمين أخرى تعطى أسعاراً أقل .

٢/٢ - تحول طالب التأمين إلى وسيلة أخرى لإدارة الخطر .

٢/٣ - انخفاض عدد الوحدات المعرضة للخطر لدى شركة التأمين مما يؤدى إلى عدم توافر أهم الشروط الفنية للتأمين حيث يتم الاخلال بقانون الاعداد الكبيرة فيصعب على شركة التأمين التنبؤ بدقة بعددالحوادث المتوقعة ومتوسط

التعويض عن الحادث الواحد وبذلك يتحول التأمين الى مضاربة أو مقامرة تؤدى فى النهاية إلى إفلاس الشركة .

٣- أن يختلف السعر باختلاف درجة الخطورة :

حتى يكون السعر عادلاً فلابد وأن يدفع كل طالب تأمين قسطاً يتناسب مع درجة تعرضه للخطر فليس من المعقول أن يكون سعر التأمين من الحريق للمبانى السكنية هو سعر التأمين من الحريق للمحلات التجارية وهو أيضاً سعر التأمين من الحريق للمصانع أو لمستودعات المواد الكيماوية أو إسطوانات الغاز ، وذلك أن كل حالة من الحالات السابقة لها درجة خطورة مختلفة (اختلاف معدل تكرار الخسارة خلال السنة واختلاف متوسط التعويض عن الحادث الواحد) وبالتالى فإن كل طالب تأمين عليه أن يدفع السعر المناسب والكافى لتغطية خطره ، وبمعنى آخر فإن السعر يجب أن يختلف من وحدة خطر لأخرى حسب درجة التعرض للخطر وبالتالى فانه لابد من وجود أسعار وليس سعر واحد بحيث يناسب كل سعر وحدة خطر معينة حسب درجة خطورتها . وقد يتبادر إلى الذهن أنه يمكن وضع سعر واحد متوسط لجميع الوحدات المعرضة للخطر وأن هذا السعر المتوسط يحمل فى طياته خصائص المتوسط بحيث يكون هناك وحدات من المفروض أن تدفع أكثر منه ووحدات من المفروض أن تدفع أقل منه وبالتالى فإن مجموع الأقساط فى النهاية سوف يكون كافياً لسداد الالتزامات التى تقع على عاتق الشركة وهذا القول غير صحيح بالمرة لأنه إذا كان السعر المطبق هو سعر واحد متوسط أو لوحدات الخطر متوسطة درجة الخطورة فإنه سوف يترتب على ذلك هروب وحدات الخطر الجيدة الى شركات أو إلى وسائل أخرى لادارة الخطر طالما أنها ترى أن هذا السعر أكبر من اللازم وبالتالى فإن معظم أو كل من يقبلون على التأمين هم أصحاب الوحدات عالية الخطورة (وحدات ردئية) مما يؤدى إلى إرتفاع مجموع الخسائر الفعلية عن الخسائر المتوقعة وبالتالى تعرض الشركة للافلاس .

أيضا يجب أن تتم مراجعة وحدات الخطر بصفة دورية على أن يتم تعديل السعر لذات الوحدة من سنة لأخرى كلما تغيرت العوامل المساعدة للخطر أو كلما تغيرت وسائل الوقاية

والمنع .

معادلة حساب القسط الوحيد الصافى فى التأمينات العامة :

يتأثر حساب القسط الوحيد الصافى فى التأمينات العامة بعنصرين أساسيين هما :

١- إحتمال حدوث الحادث

٢- متوسط التعويض عن الحادث الواحد

وسوف نوضح فى الوحدات التالية كيفية تحديد كل منهما .

أسئلة على الوحدة الدراسية الأولى

١- أذكر أهم الشروط الواجب توافرها فى سعر التأمين .

٢- وضح كيفية تحديد سعر التأمين لنوع جديد من أنواع التأمين أو لشركة تأمين جديدة ثم وضح المشاكل المترتبة على ذلك .

٣- أذكر أهم العناصر المؤثرة فى تحديد القسط الوحيد الصافى فى التأمينات العامة .

الوحدة الدراسية الثانية

احتمال حدوث الخسارة

الوحدة الدراسية الثانية

موضوعها : إحتمال حدوث الخسارة .

هدفها : تعريف الدارس بكيفية تحديد إحتمال حدوث الخسارة .

عناصرها : - احتمال الخسارة .

- الاحتمال الحسابى أو الرياضى أو النظرى .
- الاحتمال التجريبى أو العملى أو الفعلى .
- التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث .

احتمال الخسارة : Probability of Loss

احتمال حدوث الخسارة أو إحتمال حدوث الحادث عبارة عن التكرار النسبى لعدد حالات الخسارة مقسوماً على عدد الحالات التى كانت معرضة للخسارة أو هو التكرار النسبى لعدد الحوادث منسوباً إلى عدد الوحدات التى كانت معرضة للحادث ، وبالتالى فإن إحتمال حدوث الحادث يعتبر مقياساً مادياً (كمياً) يفيد فى تقدير عدد الحوادث أو الخسائر المتوقعة بالاضافة إلى أنه أحد عناصر قياس الخطر .

وتنقسم الاحتمالات من حيث طريقة حسابها إلى نوعين :

- الاحتمال الحسابى أو الرياضى أو النظرى

Mathematical Probability :

وهوالاحتمال الذى يحسب وفقاً لاسس رياضية ثابته لاتتغير قيمتها من وقت لآخر أو من شخص لآخر ، ومثال ذلك إحتمال الحصول على صورة عند القاء قطعة نقود معدنية أو احتمال الحصول على ورقة تحمل الرقم (٥) من مجموعة أوراق اللعب ، فهو إذن إحتمال لايتغير بتغير الزمان أو المكان .

- الاحتمال التجريبى أو العملى أو الفعلى Imperical Probability

هو الاحتمال الذى يحسب وفقاً لأسس رياضية تعتمد على بيانات وتجارب خاصة بظواهر حدثت بالفعلى ولكنها تتغير من وقت لآخر لذلك فإن قيمة الاحتمال التجريبى تتغير من وقت لاخر ومن مكان لأخر ومثال ذلك إحتمالات الحياة والوفاة ، أو إحتمالات الحريق أو تصادم السيارات . هذا وتنقسم الاحتمالات التجريبية أو الفعلية أو العملية من حيث وقت حسابها إلى نوعين :

- الاحتمال التجريبى المتوقع : Expected Probability

وهو الاحتمال الذى يحسب من خلال بيانات خاصة بظواهر حدثت فى الماضى ثم

إستخدامها فى التنبؤ بالاحتمال الخاص بالظواهر التى ستحدث فى المستقبل .

- الاحتمال التجريبى الفعلى : Actual or realized probability

وهو الاحتمال الذى يحسب فى نهاية المدة لتحديد مدى مطابقة الاحتمال الفعلى للإحتمال المتوقع بحيث يتم تعديل الاحتمال المتوقع حسب ماتسفر عنه النتائج الفعلية ، ويجب ملاحظة أنه لكى تقترب الاحتمالات الفعلية من الاحتمالات المتوقعة فلابد من توافر عدد كبير جداً من الوحدات المتماثلة المعرضة للخطر وهو مايعرف بقانون الاعداد الكبيرة Low of Large Numbers حيث ينص هذا القانون على أن " يتلاشى الفرق بين الاحتمال الفعلى والاحتمال المتوقع كلما زاد عدد الوحدات المعرضة للخطر زيادة كبيرة جداً " .

التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث :

لتقدير إحتمال الخسارة المتوقع لحدوث حادث ما وليكن حادث حريق أو تصادم سيارات أو سرقة أو وفاة . . . . الخ فإن ذلك يعتمد على بيانات عن الحادث خلال فترة ماضية (سنة أو أكثر) تسمى فترة الخبرة وذلك بشرط توافر عدد كافى من الوحدات المتماثلة المعرضة للخطر (مع مراعاة سلوك الظاهرة فى الماضى وهل تأخذ صفة الانتظام أم تتزايد معدلاتها من سنة لأخرى أم تتناقص وأخذ ذلك فى الاعتبار عند تقدير إحتمال الخسارة المتوقع) ، وإذا كان عدد الوحدات غير كافى فإنه يمكن زيادة فترة الخبرة أى تصبح سنتين أو ثلاثة أو خمس سنوات بدلاً من سنة واحدة ، كما يمكن تقسيم فترة الخبرة إلى فترات أقل من سنة وبذلك نتغلب على مشكلة نقص البيانات ، يضاف إلى ماسبق أنه يمكن الاعتماد على بيانات جهات أخرى مثل الشركات الأخرى التى تعمل فى نفس المجال ولها نفس الظروف ، شركات التأمين ، بعض الجهات المتخصصة كالمطافىء بالنسبة لحوادث الحريق ، وبعد تجميع البيانات وتوزيع عدد الوحدات التى كانت معرضة للخطر حسب عدد مرات إصابتها بالحادث وإحتمالاتها فإننا نحصل على التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث ، وتوجد حالتين للتوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث هما :

الحالة الأولى : حدوث حادث واحد على الاكثر خلال السنة (أو وحدة الزمن)

هناك بعض الوحدات التي تتعرض للحادث مرة واحدة على الاكثر خلال السنة (أى عدم حدوث الحادث أو حدوث حادث واحد فقط خلال السنة) أو خلال حياتها الانتاجية ومثال ذلك تعرض تحفه أثرية للكسر أو السرقة وأيضا تعرض الشخص للوفاة وفى هذه الحالة فإن الشيء أو الشخص المعرض للخطر إما أن يحدث له الحادث مرة واحدة أو لا يحدث ، وبالتالي فإذا كان لدينا ٥٠٠٠ وحدة معرضة للخطر لمدة سنة وتعرض منها ٢٠٠ وحدة للحادث خلال السنة فإنه يمكن عرض هذه البيانات فى شكل التوزيع الاحتمالى التالى :

جدول رقم (١) يوضح التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث

عدد الحوادث	عدد الوحدات	الاحتمال
٠	٤٨٠٠	٩٦ر
١	٢٠٠	٠٤ر
المجموع	٥٠٠٠	١,٠٠

ومن الجدول السابق يتضح لنا أن عدد الوحدات التي تعرضت لصفر حادث (لم تتعرض للحادث) هو ٤٨٠٠ وحدة من بين ٥٠٠٠ وحدة كانت معرضة للحادث وبالتالى فإن

إحتمال عدم حدوث الحادث يساوى $\frac{٤٨٠٠}{٥٠٠٠}$ = ٩٦ ر

وأيضا فإن عدد الوحدات التى تعرضت لحادث واحد خلال السنة هو ٢٠٠ وحدة من بين ٥٠٠٠ وبالتالى فإن إحتمال حدوث الحادث لأى وحدة يساوى $\frac{٢٠٠}{٥٠٠٠}$ =٠٤ ر

الحالة الثانية : عدم حدوث الحادث أو حدوث حادث على الأقل خلال السنة (أو وحدة الزمن)

هناك بعض الوحدات التى قد لاتتعرض للحادث خلال السنة أو تتعرض لحادث واحد على الأقل خلال السنة ومثال ذلك تعرض المصنع أو الفندق لحادث حريق أو سطو وأيضاً تعرض السيارة لحادث تصادم ففى الحالات السابقة نجد أنه قد لايحدث الحادث خلال السنة أو قد يحدث الحادث مرة واحدة أو مرتين أو ثلاثة أو أكثر خلال السنة . فإذا كان لدينا ٥٠٠٠ وحدة معرضة للخطر لمدة سنة وبدراسة هذه الوحدات حسب عدد مرات تعرضها للحادث حصلنا على التوزيع الاحتمالى التالى :

جدول رقم (٢) يوضح التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث

عدد الحوادث	عدد الوحدات	الاحتمال
٠	٣٢٠٠	٦٤ر
١	١٢٠٠	٢٤ر
٢	٤٠٠	٠٨ر
٣	١٥٠	٠٣ر
٤	٥٠	٠١ر
المجموع	٥٠٠٠	١,٠٠

ومن الجدول السابق يتضح لنا أن عدد الوحدات التى لم تتعرض لأى حادث هو ٣٢٠٠ وحدة من بين ٥٠٠٠ وحدة معرضة للخطر وبالتالى فإن إحتمال عدم حدوث أى حادث لأى وحدة هو $\frac{٣٢٠٠}{٥٠٠٠}$ = ٦٤ر . وأيضاً يمكن حساب إحتمال حدوث حادث واحد أو حادثين أو ثلاثة أو أربعة كما يلى :

إحتمال حدوث حادث واحد = $\frac{١٢٠٠}{٥٠٠٠}$ = ٢٤ر .

إحتمال حدوث حادثين = $\frac{٤٠٠}{٥٠٠٠}$ = ٠٨ر .

إحتمال حدوث ٣ حوادث = $\frac{١٥٠}{٥٠٠٠}$ = ٠٣ر.

إحتمال حدوث ٤ حوادث = $\frac{٥٠}{٥٠٠٠}$ = ٠١ر.

وأيضاً يمكن حساب إحتمال حدوث حادث واحد على الاقل أو حادثين على الأقل أو ٣ حوادث على الأقل أو ٤ حوادث على الاقل كما يلى :

إحتمال حدوث حادث واحد على الأقل = إحتمال حدوث حادث واحد أو حادثين أو ٣ أو ٤

= $\frac{١٢٠٠ + ٤٠٠ + ١٥٠ + ٥٠}{٥٠٠٠}$ = $\frac{١٨٠٠}{٥٠٠٠}$ = ٣٦ر .

إحتمال حدوث حادثين على الأقل = إحتمال حدوث حادثين أو ٣ أو ٤

= $\frac{٤٠٠ + ١٥٠ + ٥٠}{٥٠٠٠}$ = $\frac{٦٠٠}{٥٠٠٠}$ = ١٢ر .

إحتمال حدوث ٣ حوادث على الأقل = إحتمال حدوث ٣ حوادث أو ٤

= $\frac{١٥٠ + ٥٠}{٥٠٠٠}$ = $\frac{٢٠٠}{٥٠٠٠}$ = ٠٤ر .

إحتمال حدوث ٤ حوادث على الأقل = إحتمال حدوث ٤ حوادث فقط

= $\frac{٥٠}{٥٠٠٠}$ = ٠١ر .

كما يمكن حساب إحتمالات تحقيق حادث على الأكثر أو حادثين على الأكثر أو ٣ حوادث على الاكثر أو ٤ حوادث على الاكثر كما يلى :

إحتمال حدوث حادث على الاكثر = إحتمال حدوث حادث واحد أو عدم حدوث أى حادث

$$= \frac{٣٢٠٠ + ١٢٠٠}{٥٠٠٠} = \frac{٤٤٠٠}{٥٠٠٠} = ٨٨ر$$

إحتمال حدث حادثين على الاكثر = احتمال حدوث حادثين أو حادث أو عدم حدوث أى حادث

$$= \frac{٣٢٠٠ + ١٢٠٠ + ٤٠٠}{٥٠٠٠} = \frac{٤٨٠٠}{٥٠٠٠} = ٩٦ر$$

إحتمال حدوث ٣ حوادث على الاكثر = إحتمال حدوث ٣ حوادث أو حادثين أو حادث أو عدم حدوث أى حادث

$$= \frac{٣٢٠٠ + ١٢٠٠ + ٤٠٠ + ١٥٠}{٥٠٠٠} = \frac{٤٩٥٠}{٥٠٠٠} = ٩٩ر$$

إحتمال حدوث ٤ حوادث على الاكثر = إحتمال حدوث ٤ حوادث أو ٣ حوادث أو حادثين أو حادث أو عدم حدوث أى حوادث

∴ إحتمال حدوث ٤ حوادث على الاكثر

$$= \frac{٣٢٠٠ + ١٢٠٠ + ٤٠٠ + ١٥٠ + ٥٠}{٥٠٠٠} = \frac{٥٠٠٠}{٥٠٠٠} = ١$$

ملحوظة :

يتم الحصول على البيانات الخاصة بالتوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث أو لقيم الخسائر من خلال طريقتين :

الطريقة الأولى التوزيعات الاحتمالية الفعلية :

من خلال دراسة الظاهرة خلال الفترة الماضية (فترة الخبرة) وذلك بشرط توافر عدد كافى من الوحدات المتماثلة ثم تسجيلها سواء حسب عدد الحوادث التى تعرضت لها كل وحدة خلال فترة الخبرة أو حسب قيمة الخسارة ، والتوزيع الاحتمالى باستخدام هذه الطريقة يعتمد على البيانات التاريخية .

الطريقة الثانية : التوزيعات الاحتمالية النظرية :

قد لايمكن الاعتماد على البيانات المتوافرة عن الظاهرة خلال الفترة الماضية أما لعدم الثقة فيها وإما لعدم كفايتها ، وإما لأن البيانات المتاحة عن الظاهرة توضح عدد معين للحوادث (كما فى جدول رقم ٢) وهذا العدد حده الأقصى ٤ حوادث على الرغم من أنه لايوجد مايمنع من حدوث ٥ أو ٦ حوادث لأى وحدة فى العام القادم ، لذلك يفضل إستخدام التوزيع النظرى المناسب والذى يمثل منحنى ممهداً يعطى قيماً للاحتمالات المختلفة لحدوث عدد من الحوادث من صفر إلى مالانهاية مع مراعاة إستخدام التوزيع المناسب لبيانات الظاهرة من خلال الالمام بخصائص التوزيعات النظرية ، فاذا كان متوسط التوزيع يساوى تباينه فإننا نستخدم توزيع بواسون ، واذا كان المتوسط يزيد عن التباين فإننا نستخدم توزيع ذى الحدين واذا كان التباين يزيد عن المتوسط فإننا نستخدم توزيع ذى الحدين السالب مع إجراء إختبار جودة التوفيق للتأكد من مطابقة التكرارات أو الاحتمالات الخاصة بالتوزيع النظرى مع نظيرتها الخاصة بالتوزيع الفعلى .

أسئلة على الوحدة الدراسية الثانية

١- عرف إحتمال الخسارة وماهى الانواع المختلفة للاحتمالات من حيث :

طريقة حسابها ، وقت حسابها .

٢- إذا أتيحت لديك البيانات التالية والخاصة بخبرة فرع السيارات بشركة الشرق للتأمين :

عدد الحوادث	صفر	١	٢	٣
عدد السيارات	١٥٠٠٠	٤٠٠٠	٨٠٠	٢٠٠

فإذا كان هناك شخص لديه سيارة واحدة إحسب الاحتمالات الآتية بناء على خبرة شركة الشرق للتأمين :

أ- أن تتعرض السيارة لحادث واحد فقط خلال العام القادم .

ب- أن تتعرض السيارة لحادث واحد على الاقل خلال العام القادم .

حـ- أن تتعرض السيارة لحادث واحد على الاكثر خلال العام القادم .

د- ألا تتعرض السيارة لاى حادث خلال العام القادم .

الوحدة الدراسية الثالثة

قيمة الخسارة المتوقعة

الوحدة الدراسية الثالثة

موضوعها : قيمة الخسارة المتوقعة

هدفها : تعريف الطالب بكيفية تحديد قيمة الخسارة المتوقعة وهو مايعرف بمتوسط التعويض عن الحادث الواحد .

عناصرها :

- حجم الخسارة المتوقعة أو وطأة الخسارة
- حالة ثبات قيمة الخسارة
- حالة تغير قيمة الخسارة
- الأهمية النسبية للخسائر المتوقعة

حجم الخسارة المتوقعة : Expected loss or loss severity

يقصد بحجم الخسارة المتوقعة قيمة الخسارة فى حالة حدوثها ، وحيث أن قيمة الخسارة قابلة للقياس الكمى فإنها تفيد كثيراً فى تحديد مقياس عام لدرجة الخطورة ، فكما أن إحتمال حدوث الخسارة يعتبر مقياس لدرجة الخطورة فإن حجم الخسارة يعتبراً أيضاً مقياس لها بل إنه يفوق إحتمال الخسارة فى قياس درجة الخطورة وذلك لأننا نجد أن حجم الخسارة المتوقعة يعطى تكلفة تحقق الحادث بل إن إحتمال حدوث الحادث لاتظهر أهميته إلا من خلال إقترانه بحجم الخسارة المتوقعة فى حالة حدوثها ، ولتوضيح ذلك نفرض أن شخصاً يريد شراء مصنع ما وأن هذا المصنع معرض لخطر الحريق فإذا قدر له الخبراء أن إحتمال حدوث الحادث هو ١ ٪ فهل يمكن الحكم من خلال الاحتمال الحكم على درجة الخطورة بأنها منخفضة وبالتالى فإن قيمة الخطر منخفضة ، وإذا كانت قيمة الخسارة فى حالة تحقق الحادث ٢٠٠٠٠٠ جنيه وأن قيمة المصنع ٢٥٠٠٠٠ جنية فهل يظل القرار كما هو بأن درجة الخطورة منخفضة ، بالتأكيد سوف يتغير رأى متخذ القرار لأن الاحتمال وإن كان صغيراً إلا أن قيمة الخسارة المترتبة على تحقق الحادث هى قيمة كبيرة جداً (تمثل ٨٠ ٪ من قيمة المصنع) ، وعلى النقيض فإنه فى حالة ماإذا كان إحتمال حدوث الحادث ٤٠ ٪ فإذا أخذنا الاحتمال كمقياس لدرجة الخطورة فبالتأكيد سوف تكون قيمتها مرتفعة أما إذا علمنا أن قيمة الخسارة فى حالة حدوث الحادث هى ١٠٠٠ جنيه فإن القرار سوف يتغير تماماً وتنخفض درجة الخطورة وذلك لأن الاحتمال وإن كانت قيمته مرتفعة فإن قيمة الخسارة منخفضة (تمثل ٠٤ ٪ أى ٠٠٤ر من قيمة المصنع) .

نخلص من ذلك أن قيمة الخسارة لها أهمية خاصة فى تحديد درجة الخطورة (وبالتالى قياس الخطر كما سنرى فيما بعد) جنباً إلى جنب مع إحتمال حدوث الحادث

ويجب مراعاة أن حجم الخسارة المتوقعة تتراوح قيمتها بين مبلغ صغير جداً وبين مبلغ كبير جداً قد يصل إلى قيمة الشىء أو الدخل بالكامل ، فبالنسبة للمثال السابق الخاص بالمصنع والذى تبلغ قيمته ٢٥٠٠٠٠ جنيه فإنه قد لا يحدث الحادث ، وتكون الخسارة صفر وقد يحدث الحادث وفى هذه الحالة فإن قيمة الخسارة تتدرج بقيم مختلفة قد تبدأ من ١٠٠ جنيها ثم ٢٠٠ ثم ١٠٠٠ ثم ٢٠٠٠ ثم ٥٠٠٠ أو قد يكون ١٠٠٠٠٠ أو قد تصل إلى

٢٠٠٠٠٠ جنيه مع مراعاة أن بعض الاشياء لايترتب على الحادث ضياع قيمتها بالكامل حيث تكون هناك أشياء غير قابلة للاحتراق مثل الأرض والمبانى (فى بعض الحالات لاتتأثر أساسات المبنى أو الحوائط وتكون الخسائر عبارة عن الابواب والشبابيك والدهانات) وهنا يحب التفرقة بين قيمة الشيء والقيمة المعرضة للخطر .

ففى المثال السابق نجد أن قيمة الشيء (قيمة المصنع بالكامل) هى ٢٥٠٠٠٠ جنيه ولكن فى حالة حدوث حريق كامل فإنه لن يتم ضياع قيمة المصنع بالكامل حيث سيتبقى ثمن الأرض والمبانى وهذا يعنى أن القيمة المعرضة للخطر (قيمة الشيء بعد استبعاد الاشياء غير القابلة للاحتراق) قد تقل عن قيمة الشيء وهى فى هذا المثال ثم تقديرها بمبلغ ٢٠٠٠٠٠ جنيه .

ولكن المبلغ المعرض للخطر يتساوى فى حالات كثيرة مع قيمة الشيء ومثال ذلك تعرض سيارة لحادث أو إنفجار يؤدى إلى خسارة كلية أو وفاة الشخص سواء بحادث أو وفاة طبيعية حيث نجد فى هذه الحالات أن المبلغ المعرض للخطر يساوى قيمة الشيء أو الأصل .

يضاف إلى ماسبق أن هناك بعض الأشياء التى يترتب على تعرضها لحادث إلى فقد قيمتها بالكامل (أى لاتكون هناك خسائر جزئية بل هى خسائر كلية دائماً) ومثال ذلك تعرض تحفة أثرية للكسر أو تعرض الشخص لحادث يؤدى إلى وفاته .

وبناء على ذلك فإنه عند دراسةالتوزيع الاحتمالى لحجم الخسائر (أى توزيع الخسائر خلال الفترة السابقة حسب قيمتها ومعدلات تكرارها وبالتالى إحتمالات تحقق كل خسارة) فإننا نجد أنفسنا أمام حالتين محددتين :

الحالة الأولى : ثبات قيمة الخسارة :

فى هذه الحالة نجد أنه إما ألا يحدث الحادث وهنا تكون قيمة الخسائر صفر وإما أن يحدث الحادث وهنا تكون الخسارة كلية أى تساوى قيمة الشيء بالكامل ومثال ذلك تعرض تحفة أثرية للكسر أو السرقة أو تعرض واجهة المحل أو الشركة المصنوعة من قطعة واحدة من الزجاج للكسر أو وفاة الشخص ، ففى جميع الحالات السابقة نجد أن الخسارة تحدث بقيمة

واحدة وبالتالى لايكون هناك توزيعاً إحتمالياً لقيمة الخسارة ، ولتوضيح ذلك نفرض أن هناك ٥٠٠٠ وحدة متماثلة معرضة لخطر السرقة وقيمة كل منها ١٠٠٠٠ جنية وأنه قد حدث ٢٠٠ حادث سرقة خلال السنة هنا نجد أن جميع حالات الخسارة ستكون قيمة كل منها ١٠٠٠٠جنيه ، وأيضا إذا كان لدينا ٥٠٠٠ شخص لهم نفس العمر وليكن تمام السن ٤٠ ويعملون فى شركة واحدة تعطى ١٠٠٠٠ جنيه لأسرة كل متوفى وأنه قد توفى منهم خلال السنة ٢٠٠ شخص فإن المبالغ المسددة ستكون متساوية ، هنا نجد أنه بالنسبة للاشخاص أو الوحدات التى تعرضت للحادث وعددها ٢٠٠ وحدة سوف يكون التوزيع الاحتمالى لها حسب القيمة كما يلى :

جدول رقم (١) يوضح التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة

قيمة الخسارة	عدد الوحدات	الإحتمال
١٠٠٠٠	٢٠٠	١,٠٠
المجموع	٢٠٠	١,٠٠

الحالة الثانية : تغير قيمة الخسارة :

فى هذه الحالة نجد أنه إما ألا يحدث الحادث وهنا تكون قيمة الخسارة صفر أو أن يحدث الحادث ويترتب علية خسارة تأخذ أى قيمة بداية من مبلغ صغير جداً وحتى قيمة الشيء بالكامل (أو أقصى قيمة معرضة للخطر) ، ومثال ذلك حوادث السيارات أو الحريق أو السرقة ....الخ حيث نجد أنه حتى فى ظل تماثل قيم الاشياء المعرضة للخطر وبالرغم من تعرضها لنفس الحادث الا أن قيمة الخسارة الناتجة تختلف من وحدة لأخرى ، وأبسط مثال لذلك أنه قد يحدث تصادم بين سيارتين (أى نفس ظروف الحادث) ومع هذا فإن قيمة الخسارة تختلف بالنسبة لكل سيارة بل قد تتباين قيم الخسارة بحيث نجد أن خسارة السيارة الأولى ١٠٠ جنيه مثلاً والثانية ١٠٠٠٠ جنيه .

وعلى الرغم من تساوى قيم الاشياء المعرضة للخطر فى حالات كثيرة إلا أنه قيم الخسائر تختلف من وحدة لأخرى ويرجع ذلك إلى عدة عوامل منها :

١- **إختلاف طبيعة مسبب الخطر** : فالخسارة الناتجة عن الحريق تختلف قيمتها بحسب ما إذا كان الحريق قد نتج عن الاشتعال الظاهر أم عن بركان ام عن إنفجار أم عن صاعقة .

٢- **إختلاف طبيعة المبنى** : فالخسارة الناتجة عن الحريق تختلف قيمتها بحسب ماإذا كان المبنى من الطوب الحرارى أو العادى أو من المواد الأخرى القابلة للاشتعال

٣- **إختلاف طبيعة الاستعمال** : فالخسارة الناتجة عن حريق فى مبنى يستخدم فى السكنى العادية تختلف بحسب عدد السكان ، كما أن الخسارة الناتجة عن حريق فى مبنى يستخدم فى تخزين المواد تختلف بحسب طبيعة هذه المواد وهل هى قابلة للاشتعال بدرجة شديدة مثل الموادالكيماوية وإسطوانات الغاز أم هى مواد عادية .

٤- **إختلاف طبيعة المكان** : فالخسارة الناتجة عن حريق فى مبنى يجاور محطه بنزين أو مخزن لاسطوانات الغاز تختلف عن الخسارة الناتجة عن حريق فى مبنى يجاور مبانى سكنية أو هناك فواصل ومسافات بين المبانى .

٥- **مدى توافر وسائل الوقاية والمنع** : حيث تختلف قيمة الخسارة بحسب مدى توافر وسائل الوقاية والمنع الخاصة بالمبنى من عدمة أو بحسب مدى توافر وسائل الوقاية والمنع العامة (جهاز الاطفاء) ومدى قربها من المكان .

وفى حالة إختلاف قيم الخسارة من حادث إلى حادث فإنه يمكن توزيع عدد الحوادث التى تحققت حسب قيمتها (وذلك من خلال إعطاء قيمة محددة لكل خسارة أو من خلال إعطاء فئات أو مدى للخسارة) .

على سبيل المثال إذا كان لدينا ٥٠٠٠ سيارة متماثلة فى القيمة معرضة لحادث تصادم وأنه قد حدث خلال العام ١٢٠٠ حادث تصادم وبدراسة قيمة الخسائر الناتجة عن هذه الحوادث تبين أن هناك ٦٠٠ خسارة تزيد قيمتها عن الصفر وتقل عن ١٠٠٠ جنيه ، وأن هناك ٣٠٠ خسارة تأخذ قيمة من ١٠٠٠ جنية وحتى أقل من ٢٠٠٠ جنيه ، وأن هنك ١٥٠ خسارة تأخذ قيمة من ٢٠٠٠ جنية وحتى أقل من ٣٠٠٠ جنيه ، وأن هناك ٩٠خسارة تأخذ

قيمة من ٣٠٠٠ جنيه وحتى أقل من ٤٠٠٠ جنيه ، وأن هناك ٣٠ خسارة تأخذ قيمة من ٤٠٠٠ جنيه وحتى أقل من ٥٠٠٠ جنيه ، وأن هناك ١٨ خسارة تأخذ قيمة من ٥٠٠٠جنيه وحتى أقل من ٦٠٠٠ جنيه ، وأن هناك ١٢ خسارة تأخذ قيمة من ٦٠٠٠ جنيه وحتى أقل من ٧٠٠٠ جنيه .

وبناء على البيانات السابقة فإنه يمكن إعداد جدول التوزيع الاحتمالى لقيم الخسائر كما يلى :

جدول رقم (٢) التوزيع الاحتمالى لقيم الخسائر

قيمة الخسارة	عدد الوحدات	الإحتمال
صفر –	٦٠٠	٥٠ ر
١٠٠٠ –	٣٠٠	٢٥ ر
٢٠٠٠ –	١٥٠	١٢٥ ر
٣٠٠٠ –	٩٠	٠٧٥ر
٤٠٠٠ –	٣٠	٠٢٥ر
٥٠٠٠ –	١٨	٠١٥ر
٦٠٠٠–٧٠٠٠	١٢	٠١ر
المجموع	١٢٠٠	١,٠٠

وعند حساب متوسط قيمة الخسارة الناتجة عن الحادث الواحد فإنه لابد من إيجاد مركز الفئة لكل خسارة حيث :

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدني للفئة + الحد الأعلي للفئة}}{٢}$$

$$\text{أو} \quad = \text{الحد الأدنى للفئة} + \frac{١}{٢}\ \text{طول الفئة}$$

فالفئة الأولى هي : (صفر - ١٠٠٠) حدها الأدنى صفر وحدها الاعلى ١٠٠٠

وبالتالي فإن مركز الفئة = $\frac{\text{صفر} + ١٠٠٠}{٢}$ = ٥٠٠

أو = صفر + $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠٠ = ٥٠٠

وهذا يعني أننا نفترض أن الخسائر الواقعة داخل كل فئه موزعة توزيعاً منتظماً على طول الفئة وبالتالي يمكن اعتبار أن جميع الخسائر الواقعة داخل كل فئة قيمتها تمثل مركز الفئة ، والفئة الثانية هي : (١٠٠٠ - ٢٠٠٠) حدها الأدنى ١٠٠٠ وحدها الاعلى ٢٠٠٠

وبالتالي فإن مركزالفئة = $\frac{١٠٠٠ + ٢٠٠٠}{٢}$ = ١٥٠٠

وهكذا بالنسبة لباقي الفئات ، وبضرب مركز كل فئه في الاحتمال المناظر ثم جميع النواتج فإننا نحصل على متوسط قيمة الخسارة الواحدة ، أي أن :

متوسط قيمة الخسارة = مجموع حاصل ضرب كل مركز فئه في الاحتمال المناظر له

أي أن $\bar{\text{س}}$ = مجـ (س × ح (س))

حيث $\bar{\text{س}}$ متوسط قيمة الخسارة ، س مركز الفئة ، ح (س) الإحتمال المناظر لكل فئة.

وبتطبيق ذلك على بيانات جدول رقم (٤) فإننا نحصل على متوسط قيمة الخسارة كما يلي :

جدول رقم (٣) حساب متوسط قيمة الخسارة

مركز فئة الخسارة س	الاحتمال ح (س)	مركز الفئة× الاحتمال س × ح (س)
٥٠٠	٥٠ر	٢٥٠
١٥٠٠	٢٥ر	٣٧٥
٢٥٠٠	١٢٥ر	٣١٢,٥
٣٥٠٠	٠٧٥ر	٢٦٢,٥
٤٥٠٠	٠٢٥ر	١١٢,٥
٥٥٠٠	٠١٥ر	٨٢,٥
٦٥٠٠	٠١ر	٦٥
المجموع	١,٠٠	١٤٦٠ مجـ (س × ح (س))

ومن الجدول السابق يتضح أن متوسط الخسارة الواحدة ١٤٦٠جنيه (مع مراعاة أنها تحمل خصائص المتوسط أى أن هناك قيم أصغر منها وأخرى اكبر منها) .

الأهمية النسبية للخسائر المتوقعة :

يتضح لنا من العرض السابق أنه يمكن قياس الخطر من خلال عنصرين :

١- معدل تكرار الخسارة (متوسط عدد الخسائر التى يمكن حدوثها) Loss frequency

٢- وطأة الخسارة (متوسط قيم الخسائر فى حالة حدوثها) Loss Severity

وحتى يمكن تحديد الأهمية النسبية للخسائر المتوقعة التى يمكن أن يتعرض لها الأفراد أو ممتلكاتهم فإنه لابد من الاعتماد على كلا من معدل تكرار الخسارة ومتوسط قيم الخسائر فى حالة حدوثها وخلافاً لما يعتقد البعض فإن متخذ القرار يهتم بقيمة الخسارة

اكثر من إهتمامه بمعدل تكرارها ، فعلى سبيل المثال نجد أن الخسائر ذات القيم الكبيرة وخاصة مايمكن أن نطلق عليه الكارثه تكون إحتمالاتها صغيرة جداً ومع هذا فإنها تكون خطيرة جداً فى حالة تحققها من الخسائر ذات القيم البسيطة والتى تكون متكررة أى إحتمالاتها كبيرة وبالتالى فإنه يجب الاهتمام بالخسائر ذات القيم الكبيرة ، وكمثال على ذلك نجد أن حادث تصادم السيارة وتعرضها لخسارة جزئية أو كلية يكون إحتماله اكبر من إحتمال حدوث حادث يترتب عليه مسئولية مدنية ومع هذا فإن قيمة الخسارة الناتجة عن حادث يؤدى إلى مسئولية مدنية تكون اكبر بكثير من قيمة الخسارة الناتجة عن تصادم السيارة وتعرضها للخسارة وهذا يفرض على متخذ القرار أن يولى خسائر المسئولية المدنية اهمية اكبر عندما يقرر إدارة الاخطار التى يتعرض لها .

يضاف إلى ماسبق أنه حتى بالنسبة لنوع الخسارة الواحدة فإنه يجب تقسيمه إلى مستويات أو فئات فبالنسبة للخسائر المادية الناتجة عن تصادم السيارة فإنه يجب تقسيمها إلى فئات ولتكن : خسائر فى حدود ٥٠٠٠ جنيه ، خسائر تزيد عن ٥٠٠٠ جنيه وسوف نجد أن إحتمال أن تكون الخسارة اكبر من ٥٠٠٠ أقل بكثير من إحتمال أن تكون قيمة الخسارة فى حدود ٥٠٠٠ جنيه إلا أنه لابد من إعطاء الخسارة الاكبر إهتماماً اكبر بالرغم من إنخفاض إحتمال تحققها .

العوامل التى يجب مراعتها عند تقدير قيم الخسائر المتوقعة

١- يجب على مدير الخطر عند تقدير قيم الخسائر المتوقعة أن يأخذ فى اعتباره جميع أنواع الخسائر التى يمكن حدوثها نتيجة تحقق حادث معين بالاضافة الى تحديد تأثيرها من الناحية المالية على المنشأة . وعادة فإن الانواع المختلفة للخسائر الاكثر أهمية يكون من الصعب على مدير الخطر تحديدها بعكس الأنواع الأخرى الأقل أهمية والتى يكون من السهل عليه تحديدها ، وكمثال على ذلك فإن الخسائر المباشرة التى يمكن أن تتعرض لها الممتلكات يسهل تقديرها بدقة مقدماً وذلك بعكس الخسائر غير المباشرة (مثل خسائر التوقف عن العمل خلال فترة الإصلاح أو الاستبدال) والتى تنتج عن نفس الحادث حيث لاتؤخذ فى الاعتبار فى معظم الاحيان حتى تحدث، هذا بالاضافة إلى الخسائر الاخرى التى تنتج عن نفس الحادث مثل : خسائر المسئولية المدنية ، خسائر الاشخاص .

٢- كما يجب على مدير الخطر أن يأخذ فى إعتباره عند تحديد قيم الخسائر المتوقعة أن الحادث الواحد قد يؤدى إلى خسارة لاكثر من مبنى أو لاكثر من شخص أو لاكثر من وحدة وذلك حسب طبيعة الشيء المعرض للخطر .

٣- وأيضاً يجب أن يؤخذ فى الاعتبار أن المحصلة النهائية للخسائر الناتجة عن الحادث الواحد قد تزيد عن قيمة الشيء بل قد تزيد عن مجموع الخسائر التى ذكرناها سابقاً . فالخسائر الصغيرة نسبياً إذا قررت المنشأة أن تتحملها فى حالة حدوثها غالبا ماتواجهها من خلال إيراداتها أو من خلال الأصول التى يسهل تحويلها إلى نقدية أما الخسائر الكبيرة فإنه يترتب عليها مشاكل خاصة بصعوبة تدبير السيولة من ناحية أو ارتفاع تكلفة إقتراضها من ناحية اخرى لمواجهة مثل هذه الخسائر .

٤- ويضاف إلى مشكلتى صعوبة تدبير السيولة وإرتفاع تكلفتها فإن الخسائر الكبيرة قد يترتب عليها تأثيرات معاكسة خطيرة بالنسبة للتخطيط المالى للمنشأة مما يؤدى إلى مشاكل مالية كبيرة والتى يمكن للمنشأة أن تخفف من وطأتها أو أن تتحاشاها إذا أخذتها فى الأعتبار من البداية وتم تدبير الاسلوب الأمثل لمواجهتها .

٥- كما أن هناك بعض الخسائر قد تؤدى إلى دمار المنشأة Ruin of the Business ولتوضيح ذلك نفرض أن لدينا مصنعاً تعرض لحادث حريق أدى إلى إحتراق عنبر الانتاج بمحتوياته وقدرت الخسائر بمبلغ ٦٥٠٠٠٠ جنيه ، كما أدى الحادث إلى توقف العمل بالمصنع لمدة ستة أشهر وترتب على ذلك خسارة قدرها ٦٠٠٠٠٠ جنيه ونتيجة لعدم قدرة المصنع على تحمل هذه الخسائر التى بلغت ١٢٥٠٠٠٠ جنيه فقد تم اغلاق المصنع وبيعت أصوله بمبلغ ٣٠٠٠٠٠٠ جنيه فى حين أن ثمن هذه الأصول أثناء مزاولة المصنع لنشاطه تبلغ ٤٨٠٠٠٠٠ جنيه مما يعنى خسارة أخرى قدرها ١٨٠٠٠٠٠ جنيه .

٦- وأيضاً فإنه يجب عند تقدير قيمة الخسارة مراعاة تاريخ حدوث الحادث وتاريخ إستحقاق الخسارة ، فعلى سبيل المثال فإن حدوث خسارة سنوية قيمتها ٢٠٠٠٠ جنيه ولمدة ٢٠ سنة لاتساوى فى وطأتها خسارة واحدة حالاً قيمتها ٤٠٠٠٠٠ جنيه وذلك لسببين : السبب الاول إختلاف قيمة النقود باختلاف تواريخ إستحقاقها (أى تأثير عنصر الزمن

على قيمة النقود) وذلك لأن خسارة سنوية قيمتها ٢٠٠٠٠ جنيه لمدة ٢٠ سنة تعنى خسائر قدرها ٤٠٠٠٠٠ جنيه ولكن بأخذ عنصر الزمن فى الاعتبار وخصم هذه الخسائر بمعدل فائدة معين يؤدى إلى إنخفاض قيمتها كثيراً (فإذا خصمنا المبالغ السابقة بمعدل ١٠ ٪ فإن قيمتها الحالية تساوى ١٧٠٢٧١ جنيه) . والسبب الثانى هو قدرة المنشأة على سداد مبلغ ٤٠٠٠٠٠ جنيه خلال ٢٠ سنة بعكس الحال عندما يستحق هذا المبلغ مرة واحدة فى سنة ما . وأيضا فإن حدوث حادث حريق يترتب عليه خسارة نتيجة إحتراق المبنى ومحتوياته بما قيمته ١٠٠٠٠٠٠ جنيه يحتاج إلى إصلاح فورى يكون اكثر وطأة من حدوث حادث يترتب عليه مسئولية مدنية بما قيمته ١٠٠٠٠٠٠ جنيه أيضاً ولكن لن يتم سدادها قبل مرور ٤ سنوات على الأقل حتي صدور حكم من المحكمة بالمسئولية .

٧- كما يجب تعديل قيم الخسائر بعد تقديرها بحيث تعكس إرتفاع أسعار تكاليف الاصلاح أو الاستبدال أو زيادة عدد الخسائر المتوقع أو زيادة قيمة المزايا الممنوحة للعمال عند تعرضهم لحادث ولتوضيح ذلك إذا كانت قيمة الخسائر المتوقعة قد تم تقديرها على أساس خبرة ٥ سنوات سابقة بمبلغ ١٠٠٠٠ جنيه وأن أسعار الاصلاح أو الاستبدال قد زادت بمعدل ٥٠ ٪ كما يتوقع زيادتها بمعدل ١٠ ٪ فى العام القادم وبالتالى فإن قيمة الخسائر المتوقعة فى العام القادم تصبح :

$$= ١٠٠٠٠ \times \frac{١٥٠}{١٠٠} \times \frac{١١٠}{١٠٠} = ١٦٥٠٠ \text{ جنيه}$$

٨- وأخيراً فإنه يجب أن يؤخذ فى الاعتبار تأثير التغيرات فى نوعية مواد البناء وفى مسببات الخطر الخاصة بالبيئة وأيضاً فى برامج الأمان على تقدير قيمة الخسارة المتوقعة فى المستقبل .

أقصى خسارة ممكنة وأقصى خسارة محتملة أو متوقعة :

The maximum Possible loss and the maximum Probable loss

أقصى خسارة ممكنة هي أقصى خسارة يمكن حدوثها في ظل أسوأ الظروف، وأقصى خسارة محتملة هي أقصى خسارة يمكن حدوثها باحتمال معين ، وعلية يمكن القول بأن أقصى خسارة محتملة تقل عن أقصى خسارة ممكنة . ولتوضيح ذلك نفرض أن لدينا شقة تقدر محتوياتها بمبلغ ٥٠٠٠٠ جنيه ومعرضة لخطر السرقة مع مراعاة أن هناك بعض المحتويات التي يصعب سرقتها (إما لثقل وزنها أو لأنها مثبتة في الحوائط .... الخ) والتي يقدر ثمنها بمبلغ ٢٠٠٠٠ جنيه وهذا يعني أن مايمكن سرقته قد تصل قيمته إلى ٣٠٠٠٠ جنيه ، كما أوضحت البيانات السابقة الخاصة بالتوزيع الاحتمالي لقيم الخسائر للشقق المماثلة لهذه الشقة أن أكبر حادث سرقة بلغت قيمتة ٢٥٠٠٠ جنيه ، فبناء على البيانات السابقة يمكن القول بأن :

قيمة الشيء ٥٠٠٠٠ جنيه .

أقصى خسارة ممكنة = المبلغ المعرض للخطر = ٣٠٠٠٠ جنيه

أقصى خسارة محتملة = ٢٥٠٠٠ جنيه .

أسئلة على الوحدة الدراسية الثالثة

١- قارن بين : قيمة الشيء المعرض للخطر والمبلغ المعرض للخطر وهل هما مختلفان دائماً .

٢- وضح أهمية تحديد حجم الخسارة المتوقعة .

٣- ماهى العوامل التى تؤدى إلى إختلاف قيمة الخسارة على الرغم من تساوى قيم الاشياء المعرضة لنفس الخطر .

٤- فيما يلى بيان عن خبرة فرع السيارات بشركة الشرق للتأمين :

فئه الخسارة	صفر-	٢٠٠٠-	٤٠٠٠-	٦٠٠٠-	٨٠٠٠-	١٠٠٠٠-١٢٠٠٠
عدد الوحدات	٥٢٠	٢١٠	١٣٠	٧٠	٤٥	٢٥

فإذا كان هناك شخص لديه سيارة واحدة إحسب الاحتمالات الآتية بناء على خبرة شركة الشرق للتأمين :

أ- أن تتعرض السيارة لحادث يترتب عليه خسارة تتراوح قيمتها بين ٤٠٠٠ ، ٦٠٠٠ جنيه .

ب- أن تتعرض السيارة لحادث يترتب عليه خسارة تتراوح قيمتها بين ١٠٠٠٠ ، ١٢٠٠٠ جنيه .

حـ- وماهو متوسط قيمة الخسارة الناتجة عن الحادث الواحد بناء على البيانات السابقة .

٥- اذا علمت أن متوسط قيمة الخسارة من واقع خبرة ٤ سنوات سابقة قد بلغت ٢٠٠٠٠ جنيه وأن أسعار الاصلاح أو الاستبدال قد زادت بمعدل ٣٥ ٪ وينتظر زيادتها بمعدل ١٢ ٪ فى العام القادم ، ماهو تقديرك لقيمة الخسارة المتوقعة فى العام القادم .

٦- تكلم عن مجموعة العوامل التى يجب مراعاتها عند تقدير قيم الخسائر المتوقعة .

الوحدة الدراسية الرابعة

توقع الخسارة

الوحدة الدراسية الرابعة

موضوعها : توقع الخسارة .

هدفها : تعريف الطالب بكيفية تحديد توقع الخسارة العاجل وتوقع الخسارة المؤجل فى حالة توافر التوزيع الاحتمالى لعدد وقيم الخسائر .

عناصرها :

- توقع الخسارة أو التوقع الرياضى .
- حساب توقع الخسارة فى حالة توافر التوزيع الاحتمالى لعدد وقيم الخسائر .
- توقع الخسارة فى حالة توافر التوزيع الاحتمالى لمجموع للخسارات الكلية .
- التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر السنوية .

توقع الخسارة أو التوقع الرياضى :

Expectation of loss or Mathematical expectation

توقع الخسارة أو التوقع الرياضى عبارة عن القيمة التى يدفعها كل فرد من الأفراد المعرضين لخطر معين بحيث تكفى لسداد الخسائر التى يتعرض لها بعضهم ، وهذا التوقع يستخدم فى حساب قسط التأمين بحيث يدفع كل فرد من الافراد المعرضين لنفس الخطر هذا القسط لشركة التأمين والتى تقوم بسداد التعويض لمن يتعرض منهم لخسارة ، وتقتضى شروط العدالة أن تتساوى المبالغ التى تحصلها شركة التأمين من الأفراد المعرضين للخطر مع المبالغ التى تدفعها لمن يتعرض منهم لخسارة (دون أن نأخذ فى الاعتبار عنصر التحميلات أو إستثمار المبالغ المحصلة) أى أن :

مجموع المبالغ المحصلة من الأفراد للشركة = مجموع المبالغ المسددة من الشركة للأفراد

، توقع الخسارة × عدد المعرضين للخطر = قيمة الخسارة × عدد حالات الخسارة

∴ توقع الخسارة = قيمة الخسارة × $\frac{\text{عدد حالات الخسارة}}{\text{عدد المعرضين للخطر}}$

= قيمة الخسارة × إحتمال حدوث الخسارة

ويطلق على توقع الخسارة السابق بالتوقيع الرياضى العاجل حيث إقترضنا أن المبالغ المحصلة من الافراد تدفع حالاً وأيضاً المبالغ المسددة للأفراد تسدد حالاً ، وكما نعلم فإن عمليات التأمين تمتد عقودها عشرات السنين وذلك بالنسبة لعقود التأمين على الحياة (بعكس عقود تأمينات الممتلكات التى غالباً ماتكون لمدة سنة واحدة فقط) وبالتالى فإن الاشتراكات (الاقساط) تحصل من الأفراد عند بداية التعاقد وتسدد التعويضات (مبالغ التأمين) بعد فترات طويلة وبالتالى فلابد من أخذ معدل الفائدة فى الاعتبار عند حساب التوقع الرياضى وذلك بإيجاد القيمة الحالية لهذه المبالغ عند بداية التعاقد وفى هذه الحالة يطلق على توقع الخسارة : توقع الخسارة المؤجل أو التوقع الرياضى المؤجل .

∴ توقع الخسارة المؤجل = قيمة الخسارة × إحتمال حدوث الخسارة × القيمة الحالية للجنيه

والقيمة الحالية للجنيه $= \left(\frac{1}{1 + ع} \right)^{\sim}$

حيث : ع معدل فائدة إستثمار المبالغ المحصلة

~ المدة التى يستحق فى نهايتها مبلغ التأمين .

ونوضح فكرة التوقع الرياضى أو توقع الخسارة العاجل أو المؤجل من خلال المثالين التاليين .

مثال (١) :

إذا كان لدينا ٢٠٠٠ شخص يمتلك كل منهم سيارة جديدة قيمتها ٥٠٠٠٠ جنيه، تم الاتفاق فيما بينهم على إصلاح أى سيارة تتعرض لحادث خلال السنة فاذا علمت أن متوسط تكلفة إصلاح السيارة ٤٠٠٠ جنيه وأنه ينتظر تعرض ٦٠ سيارة منها لحادث ، إحسب المبلغ الواجب تحصيله من كل شخص .

الحل :

∵ مجموع المبالغ المحصلة من الافراد كإشتراك = مجموع المبالغ المسددة للمعرضين لحادث كتعويض

∴ الاشتراك أو القسط × عدد المشتركين = متوسط الخسارة × عدد حالات الخسارة

س × ٢٠٠٠ = ٤٠٠٠ × ٦٠

حيث س الاشتراك أو القسط أو التوقع العاجل

س (التوقع العاجل) $= \frac{٤٠٠٠ \times ٦٠}{٢٠٠٠} =$ ١٢٠جنيه

حل آخر:

∵ س (التوقع العاجل) = متوسط الخسارة × إحتمال حدوث الخسارة

∴ الاشتراك أو القسط $= ٤٠٠٠ \times \frac{٦٠}{٢٠٠٠} = ١٢٠$ جنيه

وهذا يعنى أن كل شخص سوف يدفع مقدماً ١٢٠ جنيه وأن هناك ٢٠٠٠ مشترك وبالتالى يتم تحصيل ١٢٠ × ٢٠٠٠ = ٢٤٠٠٠٠ جنيه ، وأنه سوف يحدث ٦٠ حادث يترتب على كل حادث خسارة قدرها ٤٠٠٠ جنيه وبالتالى يتم سداد ٦٠ × ٤٠٠٠ = ٢٤٠٠٠٠ جنيه وبالتالي تتعادل المبالغ المحصلة مع المبالغ المسددة .

مثال (٢) :

إذا كان لدينا ٥٠٠٠ شخص يبلغون من العمر تمام السن ٣٥ ثم الاتفاق بينهم على سداد مبلغ ٢٠٠٠٠ جنيه لكل من يبلغ منهم السن ٥٥ ، إحسب المبلغ الواجب تحصيله من كل شخص إذا علمت أنه ينتظر بلوغ ١٠٠٠ شخص السن ٥٥ وأنه يمكن إستثمار المبالغ المحصلة بمعدل ١٢ ٪ سنوياً .

الحل :

حيث أن المبلغ المتفق عليه سوف يدفع لمن يبلغ تمام السن ٥٥ أى بعد مرور ٢٠ عاماً فإن القسط أو المبلغ الواجب تحصيله من كل شخص يمثل التوقع الرياضى المؤجل .

∵ التوقع الرياضى المؤجل (الاشتراك) =

قيمة الخسارة × إحتمال حدوث الخسارة × القيمة الحالية للجنيه

$= ٢٠٠٠٠ \times \frac{١٠٠٠}{٥٠٠٠} \times \left(\frac{١}{١ + ٠,١٢}\right)^{٢٠}$

= ٢٠٠٠٠ × ٠,٢ × ٠,١٠٣٦٦٧٦٥

=٤١٤,٦٦٧ جنيه

وهذا يعني أن كل شخص سوف يدفع مبلغاً وقدرة ٤١٤,٦٦٧ جنيه وبالتالي يكون مجموع المبالغ المحصلة من ٥٠٠٠ شخص هو مبلغ ٤١٤.٦٦٧ × ٥٠٠٠ = ٢٠٧٣٣٣٥,٣٠٢ جنيه وهذا المبلغ سوف يتم إستثمارة بمعدل ١٢ ٪ لمدة ٢٠ سنة فتصبح جملته :

جملة المبلغ = المبلغ × (١ + ع)^{ن}

= ٢٠٧٣٣٣٥ر٣٠٢ × (١ + ٠,١٢)^{٢٠}

= ٢٠٧٣٣٣٥,٣٠٢ × ٩,٦٤٦٢٩٣٠٩٣ = ٢٠٠٠٠٠٠٠ جنيه

والمبالغ المستحقة فى نهاية المدة هى عبارة عن مجموع المبالغ المسددة لمن يبقى منهم على قيد الحياة أى أن هناك ١٠٠٠ شخص يحصل كل منهم على ٢٠٠٠٠ فيكون مجموع المبالغ ٢٠٠٠٠٠٠٠ جنيه وهذا المبلغ يساوى جملة المبالغ المحصلة من الاشخاص وبالتالى تتعادل المبالغ المحصلة مع المبالغ المسددة .

ويعتبر توقع الخسارة (التوقع الرياضى) مقياساً أكثر دقة من إستخدام إحتمال الخسارة أو حجم الخسارة المتوقعة منفرداً وذلك سواء فى تحديد درجة الخطورة أو فى تحديد تكلفة الخطر .

ولتوضيح ذلك إذا كان لدينا مصنعاً قيمته ٥٠٠٠٠٠ جنيه وإحتمال تعرضه لحادث حريق يؤدى إلى خسارة كلية هو ٠,٠٠٣ ، فإذا أخذنا فى الاعتبار إحتمال الخسارة فقط فإن ذلك يعطى إنطباعاً بأن درجة الخطورة منخفضة جداً ، ، وإذا أخذنا فى الاعتبار حجم الخسارة المتوقعة فقط فإن ذلك يعطى إنطباعاً بأن درجة الخطورة مرتفعة جداً ، أما إذا أخذنا فى الاعتبار إحتمال الخسارة وحجم الخسارة معاً وهو مايطلق عليه توقع الخسارة أو التوقع الرياضى فإن :

توقع الخسارة = ٥٠٠٠٠٠ × ٣ ٠٠ر = ١٥٠٠ جنيه .

وهذه القيمة تمثل توقع الخسارة السنوية أى هى متوسط قيمة الخسارة فى الآجل الطويل أو فى ظل توافر أعداد كبيرة من الوحدات المتماثلة ، وبمعنى آخر إذا توافر لدينا ١٠٠٠ مصنعاً لهم نفس القيمة والمواصفات وتم سداد مبلغ ١٥٠٠ كاشتراك عن كل مصنع

فإنه يتجمع لدينا ١٠٠٠ × ١٥٠٠ = ١٥٠٠٠٠٠ جنيه سنوياً ، وحيث أنه من بين كل ١٠٠٠ مصنع يتعرض ٣ مصانع لخسارة كلية (٠,٠٠٣) فإن مجموع الخسائر تصبح ٣ × ٥٠٠٠٠٠ = ١٥٠٠٠٠٠ وهى تتعادل مع الاشتراكات المحصلة .

حساب توقع الخسارة فى حالة توافر التوزيع الاحتمالى لعدد وقيم الخسائر:

عند حسابنا للتوقع الرياضى كان يتوافر لدينا إحتمال حدوث الخسارة ومتوسط قيمة الخسارة فى حالة حدوثها وحاصل ضربهما عبارة عن التوقع الرياضى ، ولكن قد يتوافر لدينا التوزيع الاحتمالى لعدد الخسائر والتوزيع الاحتمالى لقيم هذه الخسائر وفى هذه الحالة يتم تحديد معدل تكرار الخسارة من التوزيع الاحتمالى لعدد الخسائر ثم تحديد متوسط قيمة الخسارة فى حالة حدوثها من التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة وبضرب معدل تكرار الخسارة فى متوسط قيمة الخسارة فى حالة حدوثها نحصل على التوقع الرياضى أو توقع الخسارة أى أن :

توقع الخسارة أو التوقع الرياضى من التوزيعات الاحتمالية

= معدل تكرار الخسارة × متوسط قيمة الخسارة

أو = متوسط عدد الخسائر × متوسط قيمة الخسارة

وفيما يلى نوضح كيفية حساب توقع الخسارة من التوزيعات الاحتمالية .

مثال :

بدراسة خبرة شركة الشرق للتأمين فرع السيارات والتى تضمنت ٥٠٠٠ سيارة خاصة معرضة للخطر لمدة سنة حصلنا على البيانات التالية حسب عدد وقيم الخسائر .

جدول رقم (١) التوزيع الاحتمالى لعدد الخسائر

الخسائر	عدد الوحدات
٠	٤٣٠٠
١	٤٦٥
٢	١٨٠
٣	٤٥
٤	١٠
المجموع	٥٠٠٠

جدول رقم (٢) التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة

قيمة الخسارة	عدد الوحدات
٥٠٠	٤٨٢
١٥٠٠	٢٦١
٢٥٠٠	١٢٣
٣٥٠٠	٧٤
٤٥٠٠	٣٣
٥٥٠٠	١٩
٦٥٠٠	٨
المجموع	١٠٠٠

المطلوب : حساب توقع الخسارة .

الحل :

حيث أن : توقع الخسارة = معدل تكرار الخسارة × متوسط قيمة الخسارة

فإنه يتم حساب كلا منهما كما يلى :

جدول رقم (٣) حساب معدل تكرار الخسارة

عدد الحوادث ن	عدد الوحدات ك	الاحتمال ح(ن)= ك / مجـ ك	ن × ح (ن)
٠	٤٣٠٠	٨٦٠ر	٠
١	٤٦٥	٠٩٣ر	٠٩٣ر
٢	١٨٠	٠٣٦ر	٠٧٢ر
٣	٤٥	٠٠٩ر	٠٢٧ر
٤	١٠	٠٠٢ر	٠٠٨ر
المجموع	٥٠٠٠	١,٠٠	٠,٢٠٠

∴ معدل تكرار الخسارة $\bar{ن}$ = مجـ (ن × ح (ن))

= ٢ ر٠

جدول رقم (٤) حساب متوسط قيمة الخسارة

قيمة الخسارة س	عدد الوحدات ك	الاحتمال ح(س)= ك / مجـ ك	س × ح (س)
٥٠٠	٤٨٢	٤٨٢ر	٢٤١
١٥٠٠	٢٦١	٢٦١ر	٣٩١,٥
٢٥٠٠	١٢٣	١٢٣ر	٣٠٧,٥
٣٥٠٠	٧٤	٠٧٤ر	٢٥٩
٤٥٠٠	٣٣	٠٣٣ر	١٤٨,٥
٥٥٠٠	١٩	٠١٩ر	١٠٤,٥
٦٥٠٠	٨	٠٠٨ر	٥٢
المجموع	١٠٠٠	١,٠٠	١٥٠٤

∴ متوسط قيمة الخسارة $\overline{س}$ = مجـ (س × ح (س))

= ١٥٠٤

يلاحظ أن قيم الخسارة الموجودة بالجدول تمثل متوسط القيم أو مراكز فئات الخسارة لذلك تم إستخدامها كما هى .

توقع الخسارة = معدل تكرار الخسارة × متوسط قيمة الخسارة

∴ توقع الخسارة = ٠,٢ × ١٥٠٤ = ٣٠٠,٨

ملاحظات على الحل :

فى هذا المثال توافر لدينا التوزيع الاحتمالى لعددالخسائر مستقلاً عن التوزيع الاحتمالى لقيم الخسائر ، حيث تم تقسيم عدد الوحدات المعرضة للخطر وعددها ٥٠٠٠ وحدة إلى وحدات لم تتعرض لأى حادث وعددها ٤٣٠٠ وحدة والباقية وعددها ٧٠٠ تعرضت لحادث واحد على الأقل حيث تعرضت ٤٦٥ وحدة لحادث واحد وتعرضت ١٨٠ وحدة لحادثين وتعرضت ٤٥ وحدة لثلاثة حوادث وتعرضت ١٠ وحدات لأربعة حوادث أى أن اجمالى عدد الحوادث

= ٤٦٥ × ١ + ١٨٠ × ٢ + ٤٥ × ٣ + ١٠ × ٤

= ٤٦٥ + ٣٦٠ + ١٣٥ + ٤٠

= ١٠٠٠ حادث

∴ متوسط عدد الحوادث (معدل تكرار الحادث) = $\frac{١٠٠٠}{٥٠٠٠}$ = ٠,٢

كما تم توزيع عدد الحوادث (١٠٠٠ حادث) حسب قيمتها إلى حوادث متوسط قيمة الخسارة الناتجة عنها ٥٠٠ جنيه وعددها ٤٨٢ حادث ، وحوادث متوسط قيمة الخسارة فيها ١٥٠٠ جنيه وعددها ٢٦١ حادث ، وحوادث متوسط قيمة الخسارة فيها ٢٥٠٠ جنيه وعددها ١٢٣ حادث ، وحوادث متوسط قيمة الخسارة فيها ٣٥٠٠ جنيه وعددها ٧٤ حادث ، وحوادث متوسط قيمة الخسارة فيها ٤٥٠٠ جنيه وعددها ٣٣ حادث ، وحوادث متوسط قيمة الخسارة

فيها ٥٥٠٠ جنيه وعددها ١٩ حادث ، وأخيراً حوادث متوسط قيمة الخسارة فيها ٦٥٠٠ جنيه وعددها ٨ حوادث .

أى أن متوسط قيمة الخسارة

$$= ٥٠٠ \times \frac{٤٨٢}{١٠٠٠} + ١٥٠٠ \times \frac{٢٦١}{١٠٠٠} + ٢٥٠٠ \times \frac{١٢٣}{١٠٠٠} + ٣٥٠٠$$

$$\times \frac{٧٤}{١٠٠٠} + ٤٥٠٠ \times \frac{٣٣}{١٠٠٠} + ٥٥٠٠ \times \frac{١٩}{١٠٠٠} + ٦٥٠٠ \times \frac{٨}{١٠٠٠}$$

= ٢٤١ + ٣٩١,٥ + ٣٠٧,٥ + ٢٥٩ + ١٤٨,٥ + ١٠٤,٥ + ٥٢

= ١٥٠٤

توقيع الخسارة = معدل تكرار الخسارة × متوسط قيمة الخسارة

∴ توقع الخسارة = ٠,٢ × ١٥٠٤ = ٣٠٠,٨

توقع الخسارة فى حالة توافر التوزيع الاحتمالى للخسارات الكلية :

فى هذه الحالة فانه يتوافر لدينا التوزيع الاحتمالى لقيم الخسائر بداية من صفر خسارة وحتى أقصى خسارة ممكنة ، والتوزيع الاحتمالى للخسارات الكلية يشبه تماماً التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة السابق التعرض له فى المثال السابق إلا أنه يختلف عنه فى أنه يتضمن عدد الوحدات التى لم تتعرض لحادث وبالتالى تكون قيمة الخسارة المناظرة لها صفر ، وفى هذه الحالة فإنه يتضمن متوسط عدد الخسائر ومتوسط قيمة الخسارة معاً فى جدول واحد ويتم حساب توقع الخسارة من التوزيع الاحتمالى للخسارات الكلية كما يلى :

توقع الخسارة من التوزيع الاحتمالى للخسارات الكلية = مجـ (س × ح (س)) ، حيث س مراكز الفئات ، ح (س) إحتمال وقوع الخسارة فى فئه معينة

ونوضح من خلال المثال التالى كيفية حساب توقع الخسارة من التوزيع الاحتمالى للخسارات الكلية .

مثال

فيما يلى بيان عن التوزيع الاحتمالى للخسارات الكلية لمنزل قيمته ٦٥٠٠ جنيه ومعرض لحادث حريق على الأكثر خلال السنة :

جدول رقم (٥) التوزيع الاحتمالى للخسارات الكلية

قيمة الخسارة س	الاحتمال ح (س)
صفر	٨٠٠ر
٥٠٠	٠٩٦٤ر
١٥٠٠	٠٥٢٢ر
٢٥٠٠	٠٢٤٦ر
٣٥٠٠	٠١٤٨ر
٤٥٠٠	٠٠٦٦ر
٥٥٠٠	٠٠٣٨ر
٦٥٠٠	٠٠١٦ر
المجموع	١,٠٠

المطلوب :

أ- حساب توقع الخسارة

ب- إحتمال حدوث الخسارة

جـ- قيمة الخسارة المتوقعة

د- التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة فى حالة حدوثها (الخسارة الشرطية) .

الحل :

حيث أنه يتوافر لدينا التوزيع الاحتمالى للخسارات الكلية فإن : -

توقع الخسارة = مجـ (س × ح (س))

= صفر × ٨٠٠ ر+ ٥٠٠ × ٠٩٦٤ر + ١٥٠٠ × ٠٥٢٢ر + ٢٥٠٠ × ٠٢٤٦ر

+ ٣٥٠٠ × ٠١٤٨ر + ٤٥٠٠ ×٠٠٦٦ر + ٥٥٠٠ × ٠٠٣٨ر + ٦٥٠٠ × ٠٠١٦ر

= صفر + ٤٨.٢ + ٧٨،٣ + ٦١.٥ + ٥١.٨ + ٢٩.٧ + ٢٠.٩ + ١٠.٤

∴ توقع الخسارة = ٣٠٠.٨

إحتمال حدوث الحادث :

حيث أن إحتمال عدم حدوث خسارة هو ٠,٨ وأن المبنى معرض لحادث حريق على الأكثر خلال السنة أى إما لايتعرض لحادث خلال السنة أو يتعرض لحادث واحد فقط

، ∵ إحتمال حدوث حادث + إحتمال عدم حدوث حادث = ١

∴ إحتمال حدوث حادث = ١ − إحتمال عدم حدوث حادث

= ١ − ٠,٨ = ٠,٢

قيمة الخسارة المتوقعة :

∵ توقع الخسارة = إحتمال حدوث الحادث × قيمة الخسارة المتوقعة

٣٠٠.٨ = ٢ ر٠ × قيمة الخسارة المتوقعة

∴ قيمة الخسارة المتوقعة = $\frac{٣٠٠.٨}{٠,٢}$ = ١٥٠٤ جنيه

وهذه الخسارة المتوقعة تعبر عن قيمة الخسارة فى حالة حدوثها ، وبمعنى آخر فإنه فى حالة حدوث الخسارة فإنه يتوقع أن تكون قيمتها فى المتوسط ١٥٠٤ جنيه .

التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة الشرطية :

التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة الشرطية أى التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة بشرط أن الحادث قد وقع قد تم الحصول عليه من خلال ضرب إحتمال حدوث أى خسارة شرطية فى إحتمال حدوث الحادث أى أن :

إحتمال حدوث حادث وتكون قيمة الخسارة ٥٠٠ جنيه =

إحتمال حدوث الحادث × إحتمال حدوث خسارة قيمتها ٥٠٠ جنيه بشرط أن الحادث قد وقع

∴ إحتمال حدوث خسارة قيمتها ٥٠٠ جنيه = $\frac{\text{إحتمال حدوث حادث وقيمة الخسارة ٥٠٠ جنيه}}{\text{إحتمال حدوث الحادث}}$

∴ إحتمال حدوث خسارة قيمتها ٥٠٠ جنيه بشرط أن الحادث قد وقع

$= \frac{\text{٠٩٦٤ر}}{\text{٢ر٠}} = \text{٤٨٢ر٠}$

، وأيضا إحتمال حدوث خسارة قيمتها ١٥٠٠ جنيه بشرط أن الحادث قد وقع

$= \frac{\text{٠٥٢٢ر}}{\text{٢ ر}} = \text{٢٦١ر٠}$

، وهكذا بالنسبة لباقى قيم الخسائر فنحصل على الجدول التالى :

جدول رقم (٦) التوزيع الاحتمالى للخسائر الشرطية

قيمة الخسارة	الاحتمال
٥٠٠	٠,٤٨٢
١٥٠٠	٠,٢٦١
٢٥٠٠	٠,١٢٣
٣٥٠٠	٠,٠٧٤
٤٥٠٠	٠,٠٣٣
٥٥٠٠	٠,١٩
٦٥٠٠	٠,٠٠٨
المجموع	١,٠٠

ملاحظة :

إذا علمنا إحتمال حدوث الحادث والتوزيع الاحتمالى للخسائر الشرطية فإنه يمكن الحصول على التوزيع الاحتمالى للخسائر الكلية وذلك بضرب الاحتمال المناظر لكل قيمة من قيم الخسائر الشرطية فى إحتمال حدوث الحادث مع إضافة فئة فى البداية قيمتها صفر وإحتمالها هو مكمل إحتمال حدوث الحادث (أى إحتمال عدم حدوث خسارة) .

فبالنسبة لبيانات جدول رقم (١١) والخاصة بالتوزيع الاحتمالى للخسائر الشرطية إذا علمنا أن إحتمال حدوث الحادث هو ٢ر٠ فإنه بضرب الاحتمالات الموجودة بهذا الجدول فى هذا الاحتمال ثم وضع فئه فى البداية قيمتها صفر وإحتمالها ٠,٨ (١- ٢ر٠) فإننا نحصل على الجدول التالى :

جدول رقم (٧) التوزيع الاحتمالى للخسائر الكلية

قيمة الخسارة	الاحتمال
صفر	٨٠ر
٥٠٠	٠٩٦ر
١٥٠٠	٠٥٢ر
٢٥٠٠	٠٢٤ر
٣٥٠٠	٠١٦ر
٤٥٠٠	٠٠٦ر
٥٥٠٠	٠٠٤ر
٦٥٠٠	٠٠٢ر
المجموع	١,٠٠

التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر :

Probability distribution of total losses

قد ينتج عن مسبب الخطر الواحد عدة خسائر متتابعة ، وفى بعض الحالات يواجه الشيء المعرض للخطر عدة مسببات للخطر الواحد ، وفى حالات أخرى قد يتعرض الشيء المعرض للخطر لأكثر من حادث خلال السنة وأخيراً قد تكون هناك عدة وحدات معرضه للخطر وكل منها معرضة لحادث أو اكثر خلال السنة ، وفى جميع الحالات السابقة يكون من الأفضل تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر خلال السنة بدلاً من تحديد التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة الواحدة .

وقد يتساءل البعض : هل مجموع الخسائر التى تحدث خلال السنة يعتبر متغيراً عشوائياً يتم إعداد توزيعاً إحتمالياً له ؟ الاجابة بالطبع نعم لأن مجموع الخسائر خلال هذا العام يختلف عن العام الماضى وسوف يختلف عن العام القادم وعن بقية الأعوام القادمة وإن

كان هذا لايمنع حدوث حالة أن يتساوى مجموع الخسائر خلال عامين سواء متتاليين أو بينهما فاصل ، ومن خلال دراسة مجموع الخسائر لشركة معينة خلال عدد كبير من السنوات أو مجموع الخسائر السنوية خلال فتره الخبره لعدد كبير من الوحدات المتماثلة فإنه يمكن الحصول على التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر .

والتوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر يكون متوسطه عبارة عن متوسط عددالحوادث مضروباً فى متوسط قيمة الخسارة الناتجة عن الحادث الواحد ، ويفيد التوزيع الاحتمالى لمجموع قيم الخسائر فى تحديد أقصى مجموع قيم خسائر سنوية محتمل The maximum Probable yearly aggregat loss وهو عبارة عن أكبر مجموع خسائر يمكن أن يتعرض له الشىء أو الاشياء المعرضة للخطر خلال السنة باحتمال معين " وبذلك فهو يتشابه مع أقصى خسارة محتملة The Maximum Probable Loss فى أنهما يعتمدان على إحتمال معين يحدده مدير الخطر حيث يحدد مدير الخطر إحتمال وليكن ٠,٠٠٢ على الأقل ويعتبر أن أى قيمة مناظرة لها تعتبر أقصى خسارة محتملة (فى حالة التوزيع الاحتمالى للخسارة الواحدة) أو أقصى مجموع خسائر محتمل (فى حالة التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر السنوية) ، ولكن يختلف أقصى مجموع خسائر سنوية محتملة عن أقصى خسارة محتملة فى أنه يعتمد على عدد الحوادث بالإضافة إلى الخسائر الناتجة عن هذه الحوادث بعكس أقصى خسارة محتملة الذى يعتمد على قيم الخسائر الناتجة عن الحادث الواحد فقط ، وبلغة الإحتمالات فإن أقصى مجموع خسائر سنوية محتملة تعتمد فى حسابها على التوزيع الإحتمالى لمجموع الخسائر لكل عام أما أقصى خسارة فإنها تعتمد فى حسابها على التوزيع الإحتمالى للخسارة الواحدة لكل حادث .

نخلص مماسبق أن التوزيع الإحتمالى لمجموع الخسائر السنوية يوضح القيم المختلفة لمجموع الخسائر السنوية التى تحدث والإحتمال المناظر لحدوث كل قيمة من هذه القيم، ولتوضيح ذلك نأخذ التوزيع الإحتمالى التالى والخاص بمنشأة تمتلك ٥ سيارات قيمة السيارة الواحدة ٢٠٠٠٠ جنيه وكل سيارة معرضة لحادث واحد على الأكثر خلال السنة (أو تمتلك سيارة واحدة ومعرضة لخمس حوادث على الأكثر خلال السنة) وكان التوزيع الإحتمالى لمجموع قيم الخسائر كما يلى :

جدول رقم (٨) التوزيع الإحتمالى لمجموع قيم الخسائر السنوية

قيمة الخسارة	الاحتمال
صفر	٥٩٥ر
٢٠٠٠	٢٦٥ر
٤٠٠٠	١١٠ر
١٠٠٠٠	٠١٧ر
٢٠٠٠٠	٠٠٩ر
٤٠٠٠٠	٠٠٣ر
٦٠٠٠٠	٠٠١ر
المجموع	١,٠٠

ملاحظة :

حيث أن المنشأة تمتلك ٥ سيارات قيمة السيارة الواحدة ٢٠٠٠٠ جنيه بمجموع قيم ١٠٠٠٠٠ جنيه وهذه القيمة تمثل أقصى محموع خسائر سنوية يمكن حدوثه ومع هذا فان أقصى مجموع خسائر فى التوزيع الإحتمالى لمجموع الخسائر السنوية هو ٦٠٠٠٠ جنيه وهذه القيمة يمكن تفسيرها إما على أساس أنها أقصى خسائر قد حدثت بالفعل خلال السنة، كما يمكن تفسيرها على أنها قيمة تحكمية تم إفتراضها للتبسيط .

أهمية تحديد التوزيع الإحتمالى لمجموع قيم الخسائر السنوية:

تبدو أهمية تحديد التوزيع الإحتمالى لمجموع قيم الخسائر السنوية فى أنه يمكن الاستفادة به فيما يلى :

١- متوسط هذا التوزيع يمثل قسط الخطر والذى يستخدم فى تحديد قسط التأمين (كما سنرى فيما بعد) .

٢- تحديد المخصص اللازم لمواجهة الانحرافات فى قيم الخسائر الفعلية عن الخسائر المتوقعة يعتمد فى حسابه على تباين هذا التوزيع .

٣- إتخاذ أى قرار فيما يتعلق بحدود الاحتفاظ، إعادة التأمين، أسعار إعادة التأمين، عمولة أرباح إعادة التأمين يعتمد على هذا التوزيع .

٤- تحديد إحتمالات دمار المنشأة Ruin Probability يعتمد على الالمام بالتوزيع الإحتمالى لمجموع الخسائر .

٥- تحديد طريقة مواجهة الخطر المناسبة يحتاج إلى الإلمام بالتوزيع الإحتمالى لمجموع قيم الخسائر .

٦- قياس الخطر (كما سنرى فيما بعد) يعتمد على متوسط وتباين التوزيع الإحتمالى لمجموع قيم الخسائر .

٧- وأخيراً فإن تحديد التوزيع الإحتمالى لمجموع قيم الخسائر يتميز بتلخيص جميع البيانات الخاصة بالخسائر فى نموذج واحد .

ومن خلال بيانات التوزيع الإحتمالى لمجموع قيم الخسائر فإنه يمكن الحصول على العديد من المعلومات المفيدة منها :

١- حساب إحتمال أن تتعرض المنشأة لخسارة:

من خلال بيانات التوزيع الإحتمالى لمجموع قيم الخسائر يتضح لنا أن إحتمال أن مجموع قيم الخسائر يساوى صفر هو ٥٩٥ر . ومجموع خسائر صفر يحدث فى حالة عدم حدوث أى حادث وبالتالى فإن هذا الإحتمال يمثل إحتمال عدم حدوث أى حادث، وحيث أن جميع الإحتمالات الممكنة تتمثل فى :

إحتمال عدم حدوث خسارة، وإحتمال حدوث خسارة ،

فإن مجموعهما يساوى واحد صحيح ،

وحيث أن إحتمال عدم حدوث خسارة = ٥٩٥ ر

∴ إحتمال حدوث خسارة = ١ - ٥٩٥ر = ٤٠٥ر

كما يمكن الوصول إلى إحتمال حدوث خسارة من خلال تجميع جميع الإحتمالات الخاصة بحدوث خسارة إبتداء من الخسارة التى قيمتها ٢٠٠٠ وحتى ٦٠٠٠٠، أى أن :

إحتمال حدوث خسارة = ٢٦٥ر+ ١١٠ ر+ ٠١٧ر+ ٠٠٩ر+ ٠٠٣ر+ ٠٠١ر= ٤٠٥ر

٢- حساب إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى أو يزيد عن قيمة معينة :

أيضا يستفاد من تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر فى تحديد إحتمال أن مجموع خسائر العام القادم تساوى على الأقل قيمة معينة ، فمن خلال بيانات التوزيع الاحتمالى السابق يمكن حساب الاحتمالات الآتية :

١/٢ - إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ١٠٠٠٠ جنيه على الأقل

= إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ١٠٠٠٠ جنيه

+ إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ٢٠٠٠٠

+ إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ٤٠٠٠٠

+ .إحتمال مجموع الخسائر يساوى ٦٠٠٠٠

= ٠١٧ر + ٠٠٩ر + ٠٠٣ر + ٠٠١ر = ٠٣٠ر

٢/٢ – إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى٢٠٠٠٠ جنيه على الأقل =

= إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ٢٠٠٠٠ جنيه

+ إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ٤٠٠٠٠ جنيه

+ إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ٦٠٠٠٠ جنيه

= ٠٠٩,٠ + ٠٠٣,٠+٠٠١,٠= ٠١٣,٠

٣- حساب متوسط مجموع الخسائر السنوية :

يمكن تحديد متوسط مجموع الخسائر السنوية (أو توقع مجموع الخسائر السنوية) من خلال بيانات التوزيع الإحتمالى لمجموع قيم الخسائر السنوية، وهذا المتوسط يعكس عنصرين هما: معدل تكرار الخسارة، ومتوسط قيمة الخسارة .

ويجب مراعاة أن متوسط مجموع الخسائر السنوية هو قيمة متوقعة فى الاجل الطويل بمعنى أن الاحتمالات المناظرة لكل قيمة من قيم مجموع الخسائر السنوية الموجودة بجدول التوزيع الإحتمالى للخسائر السنوية كل إحتمال يعبر عن نسبة السنوات التى تتحقق فيها كل قيمة من قيم مجموع الخسائر، والقيمة المتوقعة لمجموع الخسائر السنوية (توقع مجموع الخسائر) تحسب كما يلى :

متوسط مجموع الخسائر السنوية = مجموع حاصل ضرب كل مجموع خسائر فى احتمال تحققه

$\bar{م}$ = مجـ (م × ح (م))

حيث : $\bar{م}$ = متوسط مجموع الخسائر السنوية

م = قيم مجموع الخسائر السنوية المختلفة .

ح (م) = إحتمال حدوث كل قيمة من قيم مجموع الخسائر السنوية

ومن بيانات جدول رقم (١٣) والخاص بالتوزيع الإحتمالى لمجموع قيم الخسائر السنوية فإن:

المتوسط م = صفر × ٥٩٥ر + ٢٠٠٠ × ٢٦٥ر + ٤٠٠٠ × ١١٠ر+ ١٠٠٠٠ × ٠١٧ر+ ٢٠٠٠٠ × ٠٠٩ر+ ٤٠٠٠٠ × ٠٠٣ر+ ٦٠٠٠٠ × ٠٠١ر

= صفر + ٥٣٠ + ٤٤٠ + ١٧٠ + ١٨٠ + ١٢٠ + ٦٠

∴ المتوسط = ١٥٠٠ جنيه

وهذه القيمة تعبر عن متوسط الخسائر التى تتعرض لها المنشأة فى الأجل الطويل وليس فى كل سنة على حدة .

٤- حساب إحتمال أن الخسائر السنوية تساوى أو تزيد عن قسط التأمين:

بفرض أن شركة التأمين عرضت على المنشأة تغطية الخسائر التى قد تتعرض لها المنشأة مقابل قسط تأمين سنوى قدره ٤٠٠٠ جنيه، فى هذه الحالة يمكن حساب إحتمال أن الخسائر السنوية تساوى على الأقل هذه القيمة حيث .

إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية يساوى ٤٠٠٠ جنيه على الأقل

= إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية تساوى ٤٠٠٠ جنيه

+ إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية تساوى ١٠٠٠٠ جنيه

+ إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية تساوى ٢٠٠٠٠ جنيه

+ إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية تساوى ٤٠٠٠٠جنيه

+ إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية تساوى ٦٠٠٠٠جنيه

= ١١٠ر + ٠١٧ر + ٠٠٩ر+ ٠٠٣ر+ ٠٠١ر = ١٤٠ر٠

٥- حساب إحتمال أن تحدث خسائر تؤدى إلى مشاكل مالية خطيرة للمنشأة:

فى بعض الحالات تتعرض المنشأة إلى مجموع خسائر سنوية تكون أكبر من قدرة المنشأة على مواجهتها وخاصة فيما يتعلق بتدبير السيولة اللازمة لها مما يؤدى إلى مشاكل خطيرة قد تؤدى إلى عدم قدرة المنشأة على مزاولة نشاطها مرة أخرى، وبفرض أن المنشأة

تعتبر أن أى خسائر سنوية قيمتها ٤٠٠٠٠ جنيه أو أكثر يترتب عليها مشاكل مالية خطيرة، فى هذه الحالة يمكن حساب أن الخسائر السنوية تساوى على الأقل هذه القيمة حيث :

إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ٤٠٠٠٠جنيه على الأقل

= إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية يساوى ٤٠٠٠٠ جنيه

+ إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية يساوى ٦٠٠٠٠ جنيه

= ٠٠٣ر + ٠٠١ر = ٠٠٤ر

٦- حساب أقصى خسارة ممكنة وأقصى خسارة محتملة:

من خلال بيانات التوزيع الإحتمالى لمجموع الخسائر يتضح لنا أن أقصى خسارة ممكنة هى ٦٠٠٠٠ جنيه، وفيما يتعلق بأقصى خسارة محتملة فإنها تتوقف على الإحتمال الذى يفترضه مدير الخطر، فإذا فرضنا أن مدير الخطر قدر أقصى خسارة محتملة بأنها الخسارة التى يكون إحتمال تحققها أقل من ٠٥ ٪ فإن أقصى خسارة محتملة تساوى ٤٠٠٠٠ جنيه، أما إذا قدر الإحتمال على أنه أقل من ١ ٪ فإن أقصى خسارة محتملة تنخفض إلى ٢٠٠٠٠ جنيه .

أسئلة على الوحدة الدراسية الرابعة

١- مصنع قيمته ٢٠٠٠٠٠ جنيه معرض لخطر حريق ، تبلغ قيمة الأرض والمبانى غير القابلة للاحتراق ٦٠٠٠٠ جنيه وبدراسة الخسارة خلال الفترة الماضية حصلنا على التوزيع الاحتمالى التالى لقيم الخسارة :

قيمة الخسارة	٢٠٠٠٠	٤٠٠٠٠	٦٠٠٠٠	٨٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠
الاحتمال	٥٠ر	٣٠ر	١٤ر	٠٥ر	٠١ر

إحسب : أقصى خسارة ممكنه ، أقصى خسارة محتملة مستخدماً معيار إحتمال أقل من ١٠ ٪ ، ثم احسب الخسارة المتوقعة .

٢- إتفق مجموعة من أعضاء نادى الصيد عمرهم ٤٠ سنة عددهم ٦٠٠٠ شخص على سداد ٥٠٠٠ جنيه لكل من يبلغ تمام السن ٥٥ فإذا علمت أنه ينتظر أن يتوفى منهم ١٢٠٠ خلال هذه المدة وأن معدل الفائدة ٩ ٪ سنوياً إحسب المبلغ الواجب تحصيله من كل شخص .

٣- عرضت شركة النصر لصناعة السيارات ٣٠٠٠ سيارة فيات ١٢٨ للبيع بسعر ٣٠٠٠٠ جنيه وقد طلب المشترين من الشركة أن تقوم بسداد تعويض لكل من تتعرض سيارته لحادث خلال السنة الأولى من شرائها ، فإذا علمت أن معدل تكرار الخسارة هو ٠,١٥ وأن متوسط الخسارة الناتجة عن الحادث الواحد قدرت بمبلغ ٤٠٠٠ جنيه حدد سعر بيع السيارة مقابل قيام الشركة بهذه المهمة .

٤- بدراسة خبرة شركة المهندس للتأمين فرع السطو حصلنا على البيانات التالية عن عدد وقيم الخسائر :

أولاً : التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث :

عدد الحوادث	صفر	١	٢	٣	٤
عدد الوحدات	٨٣٨٠	١٣١٠	٢٥٠	٥٠	١٠

ثانياً : التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة :

قيمة الخسارة	صفر-	٢٠٠٠ -	٤٠٠٠-	٦٠٠٠ -	٨٠٠٠ - ١٠٠٠٠
عدد الوحدات	١٢٠٠	٦٠٠	١٣٠	٥٠	٢٠

المطلوب حساب توقع الخسارة.

٥- فيما يلى بيان عن التوزيع الاحتمالى للخسارات الكلية لمصنع قيمته ٢٠٠٠٠٠ ومعرض لحادث حريق على الاكثر خلال السنة .

قيمة الخسارة	صفر	٢٠٠٠٠	٤٠٠٠٠	٦٠٠٠٠	٨٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠	١٢٠٠٠٠
الاحتمال	٧٠٠ر	١٣٥ر	٠٩٠ر	٠٤٥ر	٠١٥ر	٠٠٩ر	٠٠٦ر

المطلوب :

أ- حساب توقع الخسارة ، قيمة الخسارة المتوقعة ، إحتمال حدوث الخسارة

ب- تحديد التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة بشرط أنها قد حدثت (التوزيع الاحتمالى للخسائر الشرطية) .

٦- فيما يلى بيان عن التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر السنوية لسيارات شركة الضياء للنقل السياحى :

مجموع الخسائر	صفر	٥٠٠	١٠٠٠	٥٠٠٠	١٠٠٠٠	٢٥٠٠٠	٥٠٠٠٠	المجموع
الاحتمال	٨٠ ر	١٥ ر	٠٣ ر	٠١ ر	٠٠٧ر	٠٠٢ ر	٠٠١ر	١

المطلوب : أ -حساب إحتمال أن تتعرض الشركة لخسارة خلال العام القادم .

ب- حساب إحتمال أن تتعرض الشركة لخسائر خلال العام القادم مجموعها ٥٠٠٠ جنيه على الأقل

حـ- تحديد متوسط مجموع الخسائر السنوية .

د- تحديد أقصى خسارة ممكنة .

الوحدة الدراسية الخامسة
زمن التعرض للخطر والتوزيع التكرارى لعدد الحوادث

الوحدة الدراسية الخامسة

موضوعها :

زمن التعرض للخطر والتوزيع التكرارى لعدد الحوادث

هدفها :

تعريف الدارس بكيفية حساب زمن التعرض للخطر وإعداد التوزيع التكرارى لعدد الحوادث .

عناصرها :

- حساب زمن التعرض للخطر
- التوزيع التكرارى لعدد الحوادث
- توزيع ذى الحدين

حساب زمن التعرض للخطر :

حتى يمكن تحديد التوزيع الإحتمالى المناسب لعدد الخسائرلابد من تحديد عدد الوثائق المعرضة للخطر لعام كامل (الزمن المعرض للخطر) ثم تحديد عدد الخسائر، ويتم تحديد الزمن المعرض للخطر باستخدام الطريقة الأربعة وعشرينية كما يتضح من البيانات التالية للوثائق المصدرة فى فرع الحريق لاحدى الشركات خلال فترة الخبرة من ٩٠/١/١ إلى ٩٢/١٢/٣١

جدول يوضح عدد الوثائق المصدرة كل شهر وزمن التعرض للخطر

السنوات / الشهور	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	المجموع	زمن التعرض للخطر
يناير	٩٧٥	١٠٠٨	١٠٨٦	٣٠٦٩	٣٠٦٩ × ٢٣/٢٤ = ٢٩٤١ر١٢٠
فبراير	١٠٤٦	١١٠١	١١٢٩	٣٢٧٦	٣٢٧٦ × ٢١/٢٤ = ٢٨٦٦ر٥
مارس	٩٢٧	١٠٠٤	١٠٨٣	٣٠١٤	٣٠١٤ × ١٩/٢٤ = ٢٣٨٦ر٠٨٢
إبريل	١٠٥١	١٠٦١	١١٧٧	٣٢٨٩	٣٢٨٩ × ١٧/٢٤ = ٢٣٢٩ر٧٠٨
مايو	٩٧٧	١٠٢٣	١٠٤٤	٣٠٤٨	٣٠٤٨ × ١٥/٢٤ = ١٩٠٥
يونيو	٩٧٢	٩١٤	٩٠٨	٢٧٩٤	٢٧٩٤ × ١٣/٢٤ = ١٥١٣ر٤١٧
يوليو	١٠٢٢	٩٧٨	١٠٤٥	٣٠٤٥	٣٠٤٥ × ١١/٢٤ = ١٣٩٥ر٦٢٥
أغسطس	١٠٤٥	١٠١٢	١٠٣٢	٣٠٨٩	٣٠٨٩ × ٩/٢٤ = ١١٥٨ر٣٧٥
سبتمبر	١٠٦٨	١٠١٤	١١٢٥	٣٢٨٨	٣٢٨٨ × ٧/٢٤ = ٩٥٩
اكتوبر	١٠٧٧	١٠٩٨	١٠٨٦	٣٢٦١	٣٢٦١ × ٥/٢٤ = ٦٧٩ر٣٧٥
نوفبر	١١٠٣	١١٥٧	١٢٠٩	٣٤٦٩	٣٤٦٩ × ٣/٢٤ = ٤٣٣ر٦٢٥
ديسمبر	١٠٩٦	١١١٤	١١٤١	٣٣٥٤	٣٣٥٤ × ١/٢٤ = ١٣٩ر٧٥
المجموع					١٨٧٠٨

ويتضح من الجدول السابق أن زمن التعرض للخطر (عدد الوثائق المعرضة للخطر بالسنوات) هو ١٨٧٠٨ وثيقة ، وبدراسة هذه الوثائق حسب تعرضها للحوادث خلال فترة الخبرة أتضح أن هناك وحدات مؤمن عليها لم يحدث لها خسارة وأن هناك وحدات أخرى تعرضت لحادث خلال الفترة وأن هناك وحدات تعرضت لحادثين خلال الفترة وأن هناك وحدات تعرضت لثلاثة حوادث خلال الفترة ، وفيما يلي بيان عن توزيع عدد الوثائق المعرضة للخطر حسب عدد الحوادث :

عدد الحوادث	عدد الوثائق
صفر	١٧٥٤٩
١	١١٠٤
٢	٥٣
٣	٢
٤	صفر
المجموع	١٨٧٠٨

ويعتبر توزيعاً : بواسون وذى الحدين السالب من أكثر التوزيعات ملاءمة واستخداماً لعدد الحوادث بالنسبة للتأمينات العامة ، وحتى يمكن إختبار مدى ملاءمة البيانات السابقة لتوزيع بواسون أو لتوزيع ذى الحدين السالب فإنه يتم حساب معالم التوزيع الفعلى السابق (حساب المتوسط والتباين) أولاً ثم مساواتها بمعالم التوزيع النظرى واستخدامها فى توليد تكرارات نظرية ويلى ذلك إختبار جودة التوفيق وسوف نقوم فيما يلى بدراسة لأهم التوزيعات الإحتمالية المناسبة لعدد الحوادث :

توزيع ذى الحدين : The Binomial Distribution

فى حالة إلقاء قطعة نقود فإننا نكون إزاء نتيجتين محددتين :

إما الحصول على صورة أو الحصول على كتابة ويفرض أن إحتمال الحصول على صورة وليكن ل هو إحتمال ثابت فى كل محاولة وبالتالى فإن إحتمال عدم الحصول على

صورة (كتابة) يمثل ١- ل ، وإذا أجرينا هذه التجربة عدة مرات وليكن ن فإننا نحصل على تتابع من الصور والكتابة وبترتيبات متعددة ولتكن :

صورة ، صورة ، كتابة ، صورة ، صورة ، صورة ، كتابة ،. . . كتابة .

والحالة السابقة تحدث بإحتمال :

$ل \times ل \times (١ - ل) \times ل \times ل \times ل \times (١ - ل) \times . . . \times (١ - ل)$

وإحتمال حدوث س من المرات المتتالية الأولى صورة، ن - س من المرات التالية كتابة هو :

$$د(س) = ل^{س} \times (١ - ل)^{ن - س}$$

ويأخذ عدد الطرق المختلفة لحدوث س من المرات صورة من بين ن (عدد مرات التجربة) وبأى ترتيب ، ن - س من المرات كتابة يكون الإحتمال :

$$د(س) = \binom{ن}{س} \times ل^{س} \times (١ - ل)^{ن - س} \quad ، س = صفر، ١ ، ٢ ، . . .، ن$$

محاولات بيرنولى : Bernoulli Trials

كحالة خاصة من نظرية ذى الحدين عندما يكون عدد مرات التجربة مرة واحدة (أى ن = ١) وهنا تصبح دالة كثافة الإحتمال :

$$د(س) = \binom{١}{س} ل^{س} (١ - ل)^{١ - س} \quad ، س = صفر ، ١.$$

عند س = صفر فإن :

د(صفر)= (١- ل) وهذا يعنى أن ناتج التجربة هو فشل (أى ظهور كتابة إذا كنا نركز على الصورة)

وعند س = ١ فإن :

د (١) = ل وهذا يعنى أن ناتج التجربة هو نجاح (ظهور صورة)

وعندما يكون لدينا ن من محاولات بيرنولى فإننا نحصل على تتابع من النجاح والفشل وليكن : صورة ، صورة ، كتابة ، صورة ، صورة ، صورة ، كتابة ، . . . ، كتابة ويعطى توزيع ذى الحدين إحتمال الحصول على س من حالات النجاح من بين ن من المرات ، ومن خصائص هذا التوزيع :

متوسط التوزيع μ = ن × ل

وتباين التوزيع $\sigma^{٢}$ = ن × ل × (١ − ل)

علاقة هامة لحساب الإحتمالات :

يمكن حساب الإحتمالات المختلفة لتوزيع ذى الحدين من خلال علاقة التتابع التالية :

$$\because \text{ك}(\text{س}) = \binom{\text{ن}}{\text{س}} \text{ل}^{\text{س}} \times (١ - \text{ل})^{\text{ن} - \text{س}}$$

$$، \because \text{ك}(\text{س} + ١) = \binom{\text{ن}}{\text{س}+١} \text{ل}^{\text{س}+١} (١ - \text{ل})^{\text{ن} - \text{س} - ١}$$

$$\therefore \frac{\text{ك}(\text{س}+١)}{\text{ك}(\text{س})} = \frac{\frac{\text{ن}!}{(\text{س}+١)! \times (\text{ن} - \text{س} - ١)!} \times \text{ل}^{\text{س}+١} \times (١ - \text{ل})^{\text{ن} - \text{س} - ١}}{\frac{\text{ن}!}{\text{س}! \times (\text{ن} - \text{س})!} \times \text{ل}^{\text{س}} \times (١ - \text{ل})^{\text{ن} - \text{س}}}$$

$$= \frac{\text{ن} - \text{س}}{\text{س} + ١} \times \frac{\text{ل}}{١ - \text{ل}}$$ وبضرب الطرفين في الوسطين

$$\therefore \text{ك}(\text{س}+١) = \text{ك}(\text{س}) \times \frac{\text{ن} - \text{س}}{\text{س} + ١} \times \frac{\text{ل}}{١ - \text{ل}}$$

مثال ١:

تبين من فحص إنتاج أحد المصانع أنه من بين كل ٥٠٠ وحدة منتجة توجد ١٠٠ وحدة معيبة ، فإذا سحبنا ٥ وحدات مع الاحلال (يتم إرجاع الوحدة الأولى قبل عملية السحب التالية وهكذا . .) إحسب الإحتمالات الآتية :

أ- إحتمال الحصول على ٤ وحدات جيدة .

ب- إحتمال الحصول على ٥ وحدات جيدة .

جـ- إحتمال عدم الحصول على أى وحدة جيدة .

د- إحتمال الحصول على ٤ وحدات جيدة على الأقل .

هـ-إحتمال الحصول على ٣ وحدات معيبة

و- كون جدول توزيع ذى الحدين حسب عدد الوحدات الجيدة.

الحل :

ن = ٥

ل = إحتمال الحصول على وحدة جيدة في السحبة الواحدة

$$= \frac{٤٠٠}{٥٠٠} = ٨ر$$

١- ل = ١- ٨ر

= ٢ر

∴ إحتمال الحصول على س من الوحدات الجيدة = ح(س)

، ∵ ح(س) = (ن س) × ل^س (١- ل)^ن - س

أ- إحتمال الحصول على ٤ وحدات جيدة = ح(٤)

$$د(٤) = \binom{٥}{٤} \times (\text{٨ر})^{٤} \times (\text{٢ر})^{١}$$

$$= \frac{\underline{|٥}}{\underline{|٤} \times \underline{|١}} \times (\text{٨ر})^{٤} \times (\text{٢ر})^{١}$$

$$= ٥ \times \text{٤٠٩٦ر} \times \text{٢ر}$$

$$= \text{٤٠٩٦ر}$$

ب- إحتمال الحصول على ٥ وحدات جيدة = د(٥)

$$د(٥) = \binom{٥}{٥} \times (\text{٨ر})^{٥} \times (\text{٢ر})^{\text{صفر}}$$

$$= ١ \times \text{٣٢٧٦٨ر} \times ١$$

$$= \text{٣٢٧٦٨ر}$$

أو $\because$ $د(س + ١) = د(س) \times \frac{ن - س}{س + ١} \times \frac{ل}{١ - ل}$

$$\therefore د(٥) = د(٤) \times \frac{٥ - ٤}{٤ + ١} \quad \frac{\text{٨ ر}}{\text{٢ ر}}$$

$$= \text{٤٠٩٦ر} \times \frac{١}{٥} \times \frac{\text{٨ ر}}{\text{٢ ر}} = \text{٣٢٧٦٨ر}$$

جـ- إحتمال عدم الحصول على أى وحدة جيدة = د(صفر)

$$د(\text{صفر}) = \binom{٥}{\text{صفر}} \times (\text{٨ر})^{\text{صفر}} \times (\text{٢ر})^{٥}$$

$$= \frac{\underline{|٥}}{\underline{|\text{صفر}} \times \underline{|٥}} \times ١ \times \text{٠٠٠٣٢ر}$$

$$= ١ \times ١ \times \text{٠٠٠٣٢ر}$$

= ٠٠٠٣٢ر

د- إحتمال الحصول على ٤ وحدات جيدة على الأقل =

إحتمال الحصول على ٤ وحدات جيدة + إحتمال الحصول على ٥ وحدات جيدة

= ٤٠٩٦ر + ٣٢٧٦٨ر

= ٧٣٧٢٨ر

هـ- إحتمال الحصول على ٣ وحدات معيبة = إحتمال الحصول على وحدتين جيدتين

إحتمال الحصول على وحدتين جيدتين = ك(٢)

$$\text{ك}(٢) = \binom{٥}{٢} \times (\text{٨ر})^{٢} \times (\text{٢ر})^{٣}$$

$$= \frac{\underline{٥|}}{\underline{٢|} \times \underline{٣|}} \times \text{٦٤ر} \times \text{٠٠٨ر}$$

= ١٠ × ٦٤ر × ٠٠٨ر

= ٠٥١٢ر

و- لتكوين جدول توزيع ذى الحدين حسب عدد الوحدات الجيدة فإنه يتم الحصول على جميع الإحتمالات الخاصة بالوحدات الجيدة إبتداء من عدم الحصول على أى وحدة جيدة ثم وحدة جيدة ثم وحدتين جيدتين وهكذا ... حتى الحصول على جميع الوحدات جيدة ويتم ذلك كما يلى :

$$\text{ك (صفر)} = \binom{٥}{\text{صفر}} \times (\text{٨ر})^{\text{صفر}} \times (\text{٢ر})^{٥}$$

= ٠٠٠٣٢ر

$$\text{ك}(١) = \binom{٥}{١} \times (\text{٨ر})^{١} \times (\text{٢ر})^{٤}$$

= ٠٠٦٤ر

$$\text{ك}(٢) = \binom{٥}{٢} \times (\text{٨ر})^{٢} \times (\text{٢ر})^{٣}$$

= ر٠٥١٢

$$\text{ك}(٣) = \binom{٥}{٣} \times (\text{ر}٨)^{٣} \times (\text{ر}٢)^{٢}$$

= ر٢٠٤٨

$$\text{ك}(٤) = \binom{٥}{٤} \times (\text{ر}٨)^{٤} \times (\text{ر}٢)^{١}$$

= ر٤٠٩٦

$$\text{ك}(٥) = \binom{٥}{٥} \times (\text{ر}٨)^{٥} \times (\text{ر}٢)^{\text{صفر}}$$

= ر٣٢٧٦٨

حل آخر باستخدام العلاقة التتابعية :

$$\because \text{ك}(\text{س} + ١) = \text{ك}(\text{س}) \times \frac{\text{ن} - \text{س}}{\text{س} + ١} \times \frac{\text{ل}}{١ - \text{ل}}$$

$$\because \text{ك}(\text{صفر}) = \text{ر}٠٠٠٣٢$$

$$\therefore \text{ك}(١) = \text{ر}٠٠٠٣٢ \times \frac{٥}{١} \times \frac{\text{ر}٨}{\text{ر}٢}$$

= ر٠٠٦٤

$$،\ \text{ك}(٢) = \text{ك}(١) \times \frac{٥ - ١}{١ + ١} \times \frac{\text{ر}٨}{\text{ر}٢}$$

$$= \text{ر}٠٠٦٤ \times \frac{٤}{٢} \times \frac{\text{ر}٨}{\text{ر}٢}$$

= ر٠٥١٢

$$\text{ك}(٣) = \text{ك}(٢) \times \frac{٥ - ٢}{٢ + ١} \times \frac{\text{ر}٨}{\text{ر}٢}$$

$$= \text{٠٥١٢ر} \times \frac{٣}{٣} \times ٤$$

$$= \text{٢٠٤٨ر}$$

$$\text{د}(٤) = \text{د}(٣) \times \frac{٥ - ٣}{٣ + ١} \times \frac{\text{٨ر}}{\text{٢ر}}$$

$$= \text{٢٠٤٨ر} \times \frac{٢}{٤} \times ٤$$

$$= \text{٤٠٩٦ر}$$

$$\text{د}(٥) = \text{د}(٤) \times \frac{٥ - ٤}{٤ + ١} \times \frac{\text{٨ر}}{\text{٢ر}}$$

$$= \text{٤٠٩٦ر} \times \frac{١}{٥} \times ٤$$

$$= \text{٣٢٧٦٨ر}$$

إعداد جدول ذى الحدين حسب عدد الوحدات الجيدة :

يتم إعداد هذا الجدول من خانتين الأولى توضح قيم المتغير العشوائى والثانية توضح إحتمال الحصول عليها وذلك على النحو التالى :

جدول توزيع ذى الحدين حسب الوحدات الجيدة

عدد الوحدات الجيدة	الإحتمال
صفر	ك (صفر) = $\binom{٥}{صفر}$ (٨ر)^{صفر} (٢ر)^{٥} = ر٠٠٠٣٢
١	ك (١) = $\binom{٥}{١}$ (٨ر)^{١} (٢ر)^{٤} = ر٠٠٦٤٠
٢	ك (٢) = $\binom{٥}{٢}$ (٨ر)^{٢} (٢ر)^{٣} = ر٠٥١٢٠
٣	ك (٣) = $\binom{٥}{٣}$ (٨ر)^{٣} (٢ر)^{٢} = ر٢٠٤٨٠
٤	ك (٤) = $\binom{٥}{٤}$ (٨ر)^{٤} (٢ر)^{١} = ر٤٠٩٦
٥	ك (٥) = $\binom{٥}{٥}$ (٨ر)^{٥} (٢ر)^{صفر} = ر٣٢٧٦٨
المجموع	١

ويستفادمن الجدول السابق فى حساب جميع الإحتمالات الممكنة والمتعلقة بالسلع الجيدة أو المعيبة على السواء .

ملاحظة هامة :

هناك مجموعة من الشروط التى يجب توافرها حتى يمكن تطبيق أو أستخدام توزيع ذى الحدين وهى :

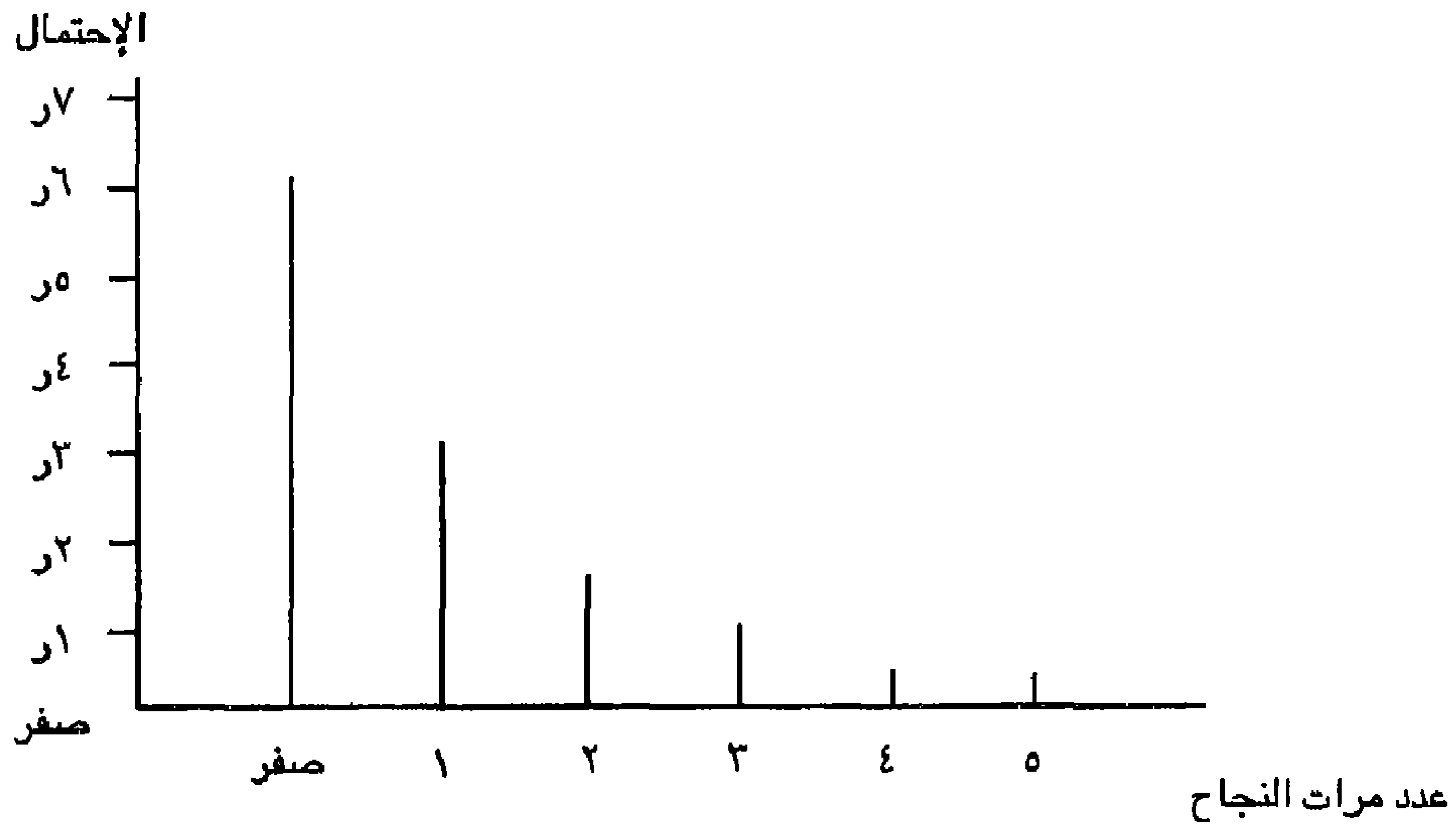
١- تتكون التجربة من مجموعة من المحاولات المتتالية والمتماثلة .

١- ينتج عن كل محاولة نتيجتين إما نجاح أو فشل للمتغير الذى نراقبه

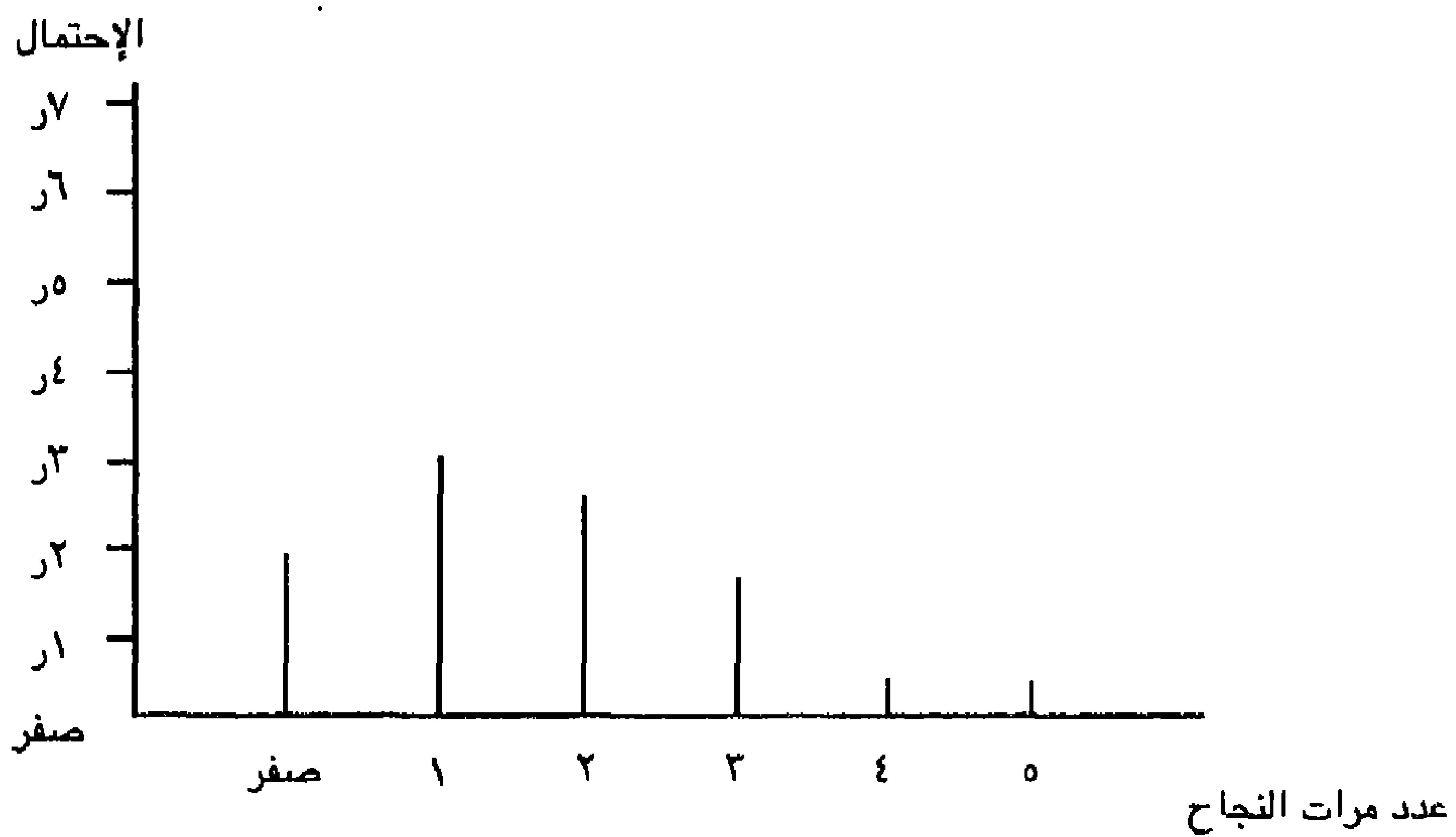
٣- إحتمال النجاح ثابت في كل محاولة وأيضاً إحتمال الفشل .

٤- المحاولات المتتالية مستقلة تماماً عن بعضها البعض بمعنى أن نتيجة المحاولة الأولى لا تؤثر على نتيجة المحاولة الثانية ، كما أن المحاولة الثانية لاتتأثر بالمحاولة الأولى ولاتؤثر فى المحاولة الثالثة .

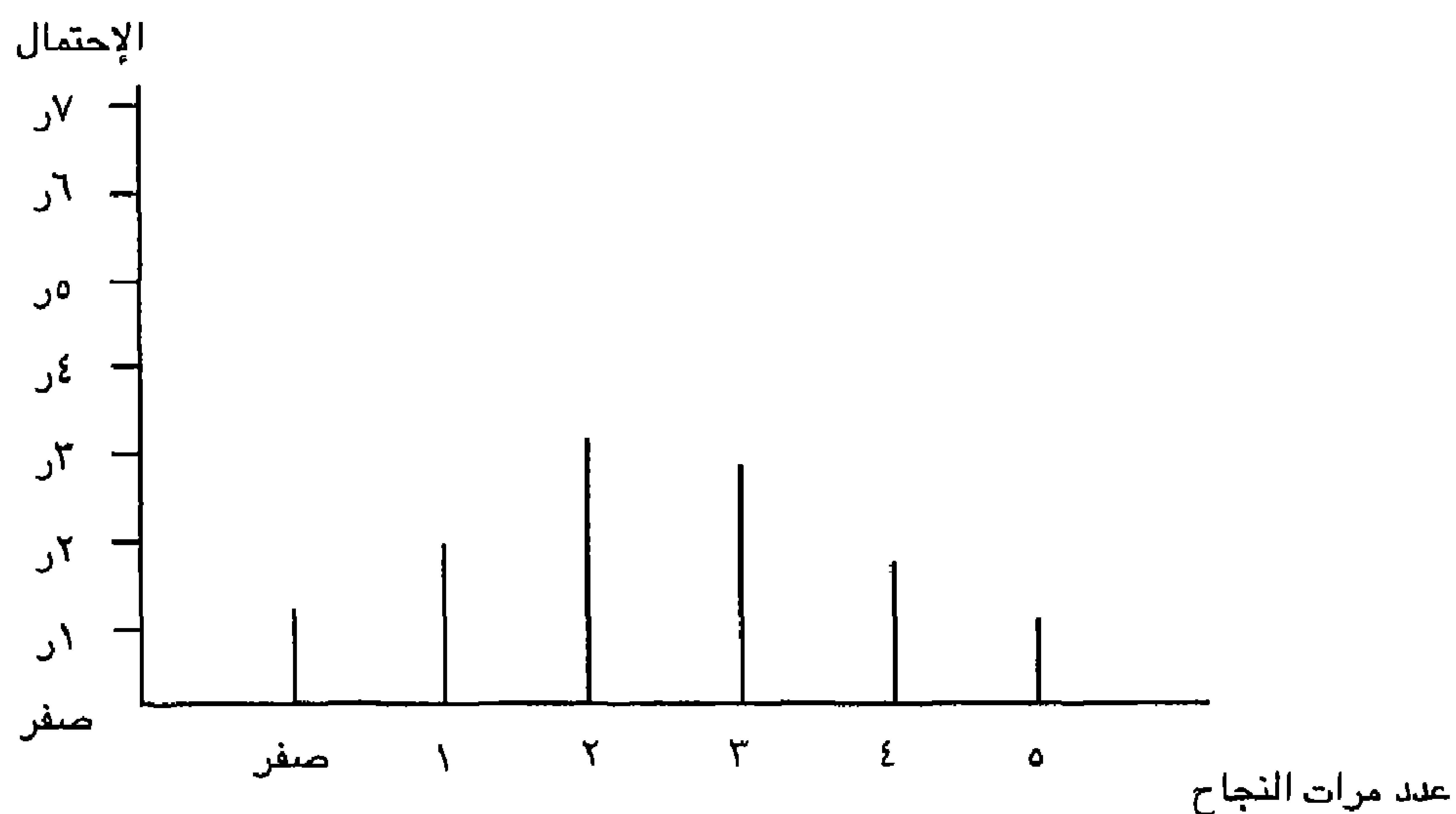
هذا ويتميز توزيع ذى الحدين بأن دالة كثافة الإحتمال تكون متماثلة كلما إقترب إحتمال النجاح من $\frac{١}{٢}$ لكل محاولة وذلك بغض النظر عن حجم العينة (عدد مرات التجربة) ويتضح ذلك من الأشكال البيانية الآتية والتى توضح شكل دالة كثافة الإحتمال فى حالة ~ = ٥ وعند إحتمالات نجاح مختلفة :



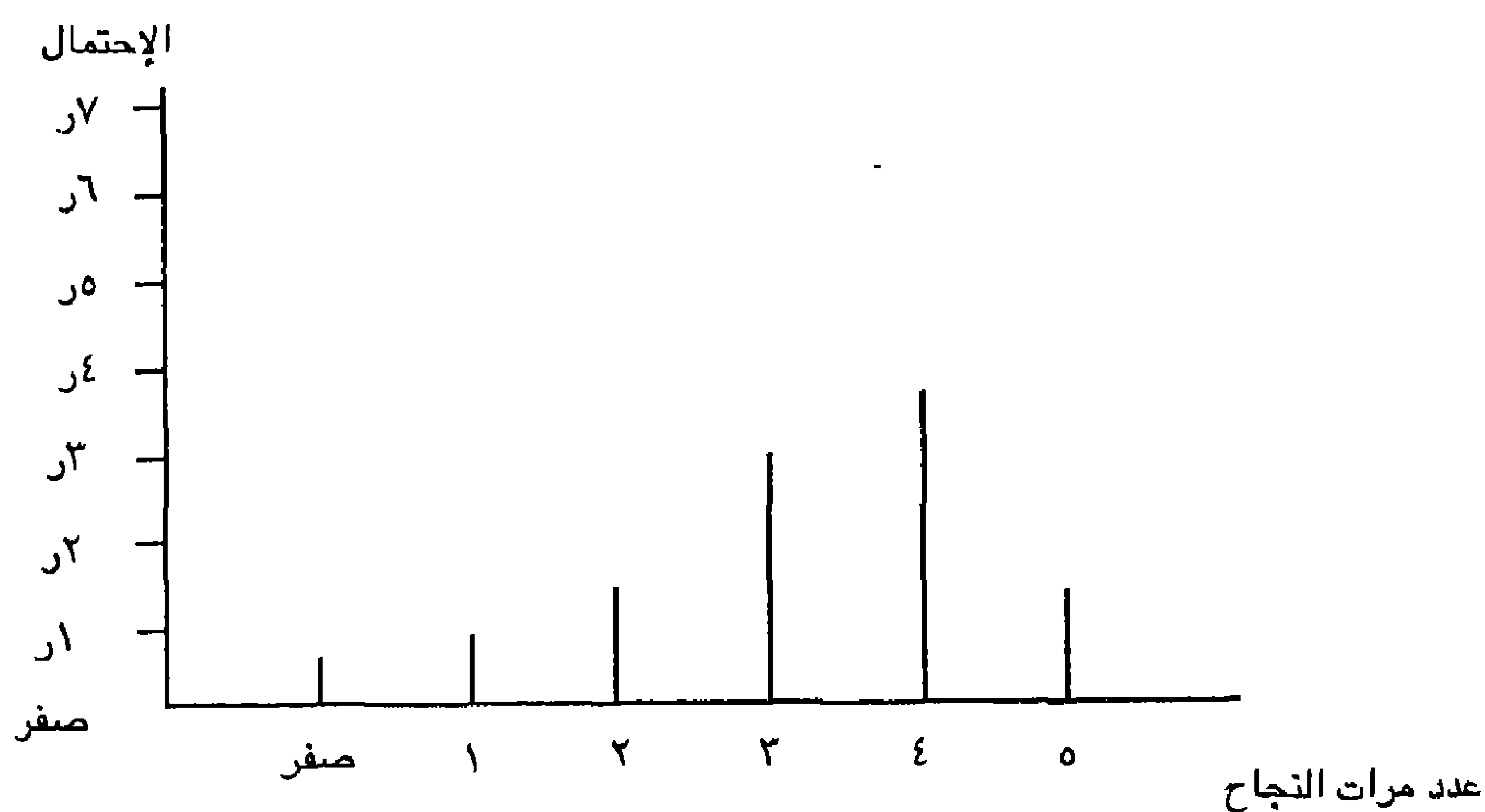
شكل (١) دالة كثافة الاحتمال عند ل = ١ر



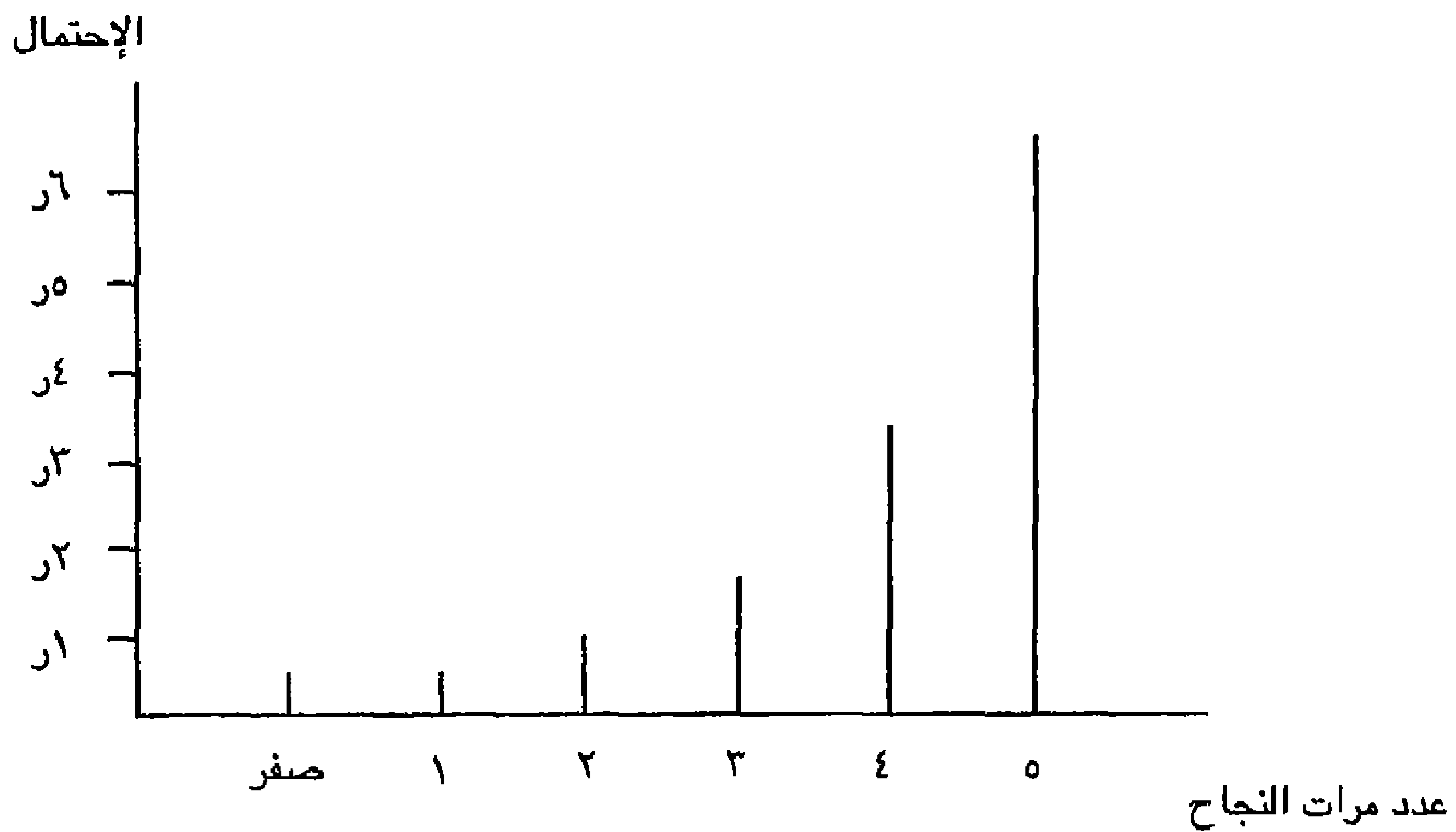
شكل (٢) دالة كثافة الاحتمال عند ل = ٣ر



شكل (٣) دالة كثافة الاحتمال عند ل = ٥ر

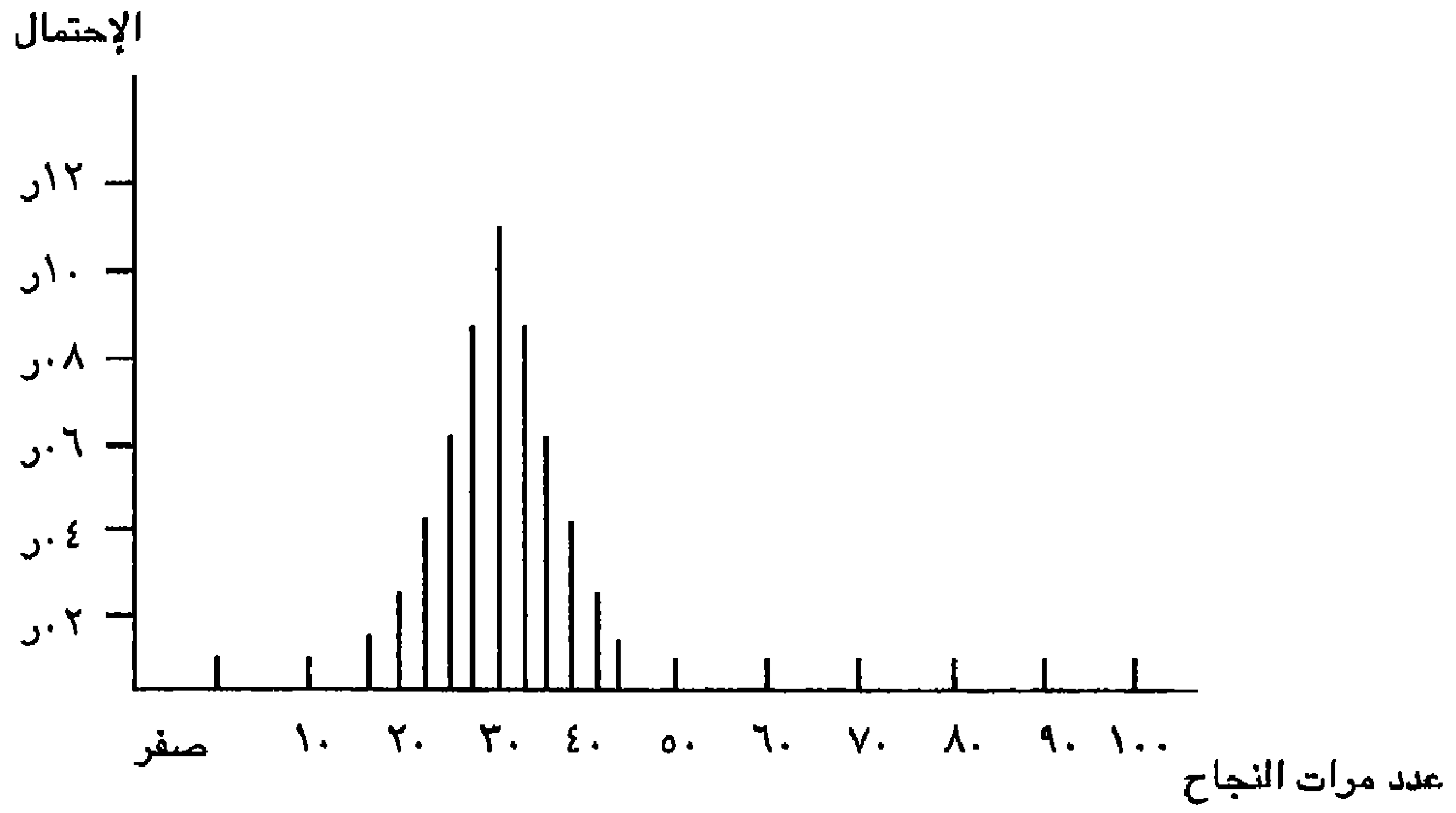


شكل (٤) دالة كثافة الاحتمال عند ل = ٧ر



شكل (٥) دالة كثافة الاحتمال عند ل = ٩ر

كما أن دالة كثافة الإحتمال لتوزيع ذى الحدين تصبح متماثلة بدرجة أكبر كلما زاد عدد مرات إجراء التجربة (كلما زادت قيمة ~) وذلك بغض النظر عن قيمة إحتمال النجاح فى المحاولة الواحدة وسواء كان الإحتمال قريباً من $\frac{١}{٢}$ أو غير قريب، ونستفيد من هذه الخاصية فى حساب الإحتمالات الخاصة بتوزيع ذى الحدين باستخدام جدول التوزيع الطبيعى الذى سيتم دراسته فيما بعد وذلك فى حالة كبر حجم العينة (زيادة قيمة ~ أو عدد مرات التجربة) ، والشكل التالى يوضح دالة كثافة الإحتمال لتوزيع ذى الحدين عندما يكون إحتمال النجاح فى المحاولة الواحدة ٢ر وفى حالة زيادة حجم العينة .



شكل (٦) دالة كثافة الاحتمال عند ~ = ١٠٠

مثال (٥)

فيما يلي بيان عن نتائج فرع السيارات بإحدى شركات التأمين خلال عام ١٩٩٠

عدد مرات الخسائر	عدد الوثائق
صفر	٤٨٢
١	٣٨٦
٢	١١٦
٣	١٥
٤	١
المجموع	١٠٠٠

فإذا علمت أن عدد الخسائر يتبع توزيع ذى الحدين فاحسب الإحتمالات الآتية :

أ- إحتمال عدم حدوث أى حادث .

ب- إحتمال حدوث حادث واحد .

حـ - إحتمال حادثين على الأقل .

الحل : يتم أولا تقدير معالم توزيع ذى الحدين من خلال بيانات العينة كما يلى :

جدول رقم ٤/٢

عدد الخسائر س	عدد الوثائق ك	عدد الخسائرX عدد الوثائق س X ك
صفر	٤٨٢	صفر
١	٣٨٦	٣٨٦
٢	١١٦	٢٣٢
٣	١٥	٤٥
٤	١	٤
المجموع	١٠٠٠	٦٦٧

$$\therefore \bar{س} = \frac{مجـ\ س\ ك}{مجـ ك}$$

$$= \frac{٦٦٧}{١٠٠٠}$$

$$= ٦٦٧$$

وبمساواة المتوسط النظرى بالمتوسط الفعلى أى: $\mu = \bar{س}$

∴ μ = ∼ X ل

∴ هـ - ∼ X ل

∴ ل = $\frac{٦٦٧ر}{٤}$

= ١٦٦٧٥ر

، ١- ل = ١- ١٦٦٧٥ر = ٨٣٣٢٥ ر

(أ) إحتمال عدم حدوث أى خسارة = ≤ (صفر)

≤ (صفر) = $\binom{٤}{صفر}$ (١٦٦٧٥ر)^{صفر} (٨٣٣٢٥ر)^{٤}

= ٤٨٢٠٦ر

(ب) إحتمال حدوث حادث واحد = ≤ (١)

≤ (١) = ≤ (صفر) X $\frac{∼ - س}{س + ١}$ X $\frac{ل}{١ - ل}$

= ٤٨٢٠٦ر X $\frac{٤ - صفر}{صفر + ١}$ X $\frac{١٦٦٧٥ر}{٨٣٣٢٥ر}$

= ٣٨٥٨٧٩ر

(جـ) إحتمال حدوث حادثتين على الأقل

= ١- (إحتمال حدوث حادث واحد + إحتمال عدم حدوث أى حادث)

= ١- (٤٨٢٠٦ ر + ٣٨٥٨٧٩ر)

= ١- ٨٦٧٩٣٩ر

= ١٣٢٠٦١ر

أسئلة على الوحدة الدراسية الخامسة

١- فيما يلى بيان عن نتائج فرع السطور خلال عام ١٩٩١ بإحدى شركات التأمين المصرية :

عدد الخسائر	عدد الوثائق
صفر	٩٦١
١	٧٧١
٢	٢٣٣
٣	٣٢
٤	٣
المجموع	٢٠٠٠

فإذا علمت أن عدد الخسائر يتبع توزيع ذى الحدين فاحسب :

أ- إحتمال حدوث حادثين للوثيقة الواحدة

ب- إحتمال حدوث حادثين على الأقل للوثيقة الواحدة

جـ- إحتمال عدم حدوث أى حادث

د- عدد الوثائق التى تتعرض لحادثين خلال العام القادم إذا كان عدد الوثائق المتوقع هو ٢٥٠٠ وثيقة .

٢- إذا علمت أن متوسط عدد الحوادث فى فرع السطو للوثيقة الواحدة هو ٤ر٢ وأن توزيع الوثائق حسب عدد الحوادث يتبع توزيع ذى الحدين وأن الحد الأقصى لعدد الحوادث للوثيقة الواحدة هو ٤ حوادث فاحسب :

أ- إحتمال حدوث حادثين فقط خلال العام .

ب - إحتمال حدوث حادثين على الأقل خلال العام .

جـ - عدد الوثائق التى ينتج عنها ٣ حوادث إذا كان عدد الوثائق المتوقع خلال العام القادم هو ٢٨٠٠٠ وثيقة .

الوحدة الدراسية السادسة
توزيع بواسون كتوزيع مناسب لعدد الحوادث

الوحدة الدراسية السادسة

موضوعها: توزيع بواسون كتوزيع مناسب لعدد الحوادث

هدفها : تعريف الطالب بكيفية إستخدام توزيع بواسون فى حساب الاحتمالات المختلفة المتعلقة بعدد الحوادث.

عناصرها:

- خصائص توزيع بواسون.
- إستخدام توزيع بواسون كتقريب لتوزيع ذى الحدين.

خصائص توزيع بواسون: The poisson distribution

يعتبر توزيع بواسون من التوزيعات الخاصة بالحوادث النادرة وذلك لأن هناك متغيرات عشوائية تكون إحتمالات حدوثها (ل) نادرة ويكون عدد مرات التجربة(~) كبيراً جداً وفى هذه الحالة فإن هذه المتغيرات العشوائية تتبع توزيع بواسون ومنها:

١- عدد الحوادث اليومية للسيارات التى تسير على طريق معين.

٢- عدد السيارات التى تصل إلى محطة الوقوف خلال دقيقة معينة.

٣- عدد السيارات طالبة الخدمة فى إحدى محطات البنزين.

٤- عدد الأخطاء المطبعية فى الصفحة لكتاب معين.

٥- عدد العملاء الذين يصلون إلى أحد المطاعم فى لحظة معينة.

٦- عدد الطائرات التى تصل إلى أحد المطارات فى لحظة معينة.

فعلى سبيل المثال إذا إفترضنا أن متوسط عدد السيارات طالبة الخدمة فى محطة الخدمة والتى تصل خلال ساعة معينة هو ٢٠ سيارة (μ = ٢٠)، وإذا إفترضنا أن معدل وصول السيارات خلال لحظة معينة يتبع توزيع بواسون فإنه يجب مراعاة الشروط الآتية :

١- ان إحتمال وصول سيارة واحدة لمحطة الخدمة خلال فترة قصيرة جداً ولتكن ثانية واحدة يكون نسبة من الفترة الزمنية التى حسب على أساسها المتوسط أى يساوى $\frac{٢٠}{٦٠\times٦٠} = \frac{١}{١٨٠}$ وتسمى الفترة الزمنية التى يحسب على أساسها الإحتمال بالفترة الجزئية أو الفرعية.

٢- أن إحتمال وصول أكثر من سيارة واحدة خلال الفترة الجزئية يساوى صفر .

٣- أن عدد السيارات التى تصل خلال أى فترة جزئية مستقل تماماً عن عدد السيارات التى تصل خلال أى فترة جزئية أخرى.

وتأخذ دالة كثافة الإحتمال لتوزيع بواسون الشكل الآتى:

$$ك(س) = \frac{هـ^{-\mu} \times \mu^{س}}{\underline{|س}} \quad ، س = صفر ، ١، ٢، ...$$

حيث هى μ متوسط عدد حالات النجاح خلال الفترة = ىـ × ل ،

هـ أساس اللوغاريتم الطبيعى وتساوى ٢٫٧١٨٢٨

وتوجد علاقة هامة تستخدم فى حساب الإحتمالات المتتابعة حيث:

$$ك(س + ١) = \frac{هـ^{-\mu} \times \mu^{س+١}}{\underline{|س+١}}$$

$$\therefore \frac{ك(س+١)}{ك(س)} = \frac{هـ^{-\mu} \times \mu^{س+١}}{\underline{|س+١}} \times \frac{\underline{|س}}{هـ^{-\mu} \times \mu^{س}}$$

$$\frac{ك(س+١)}{ك(س)} = \frac{\mu}{س + ١}$$

$$\therefore ك(س+١) = ك(س) \times \frac{\mu}{س+١}$$

والأمثلة التالية توضح كيفية إستخدام وتطبيق توزيع بواسون.

مثال١: إذا علمت أن متوسط عدد الحوادث المبلغة لإحدى شركات التأمين هو حادثين يومياً، وأن عدد الحوادث يتبع توزيع بواسون ، فبالنسبة لأحد الأيام إحسب الإحتمالات الآتية:

أ- إحتمال حدوث حادث واحد خلال اليوم.

ب- إحتمال عدم حدوث أى حادث خلال اليوم.

جـ- إحتمال حدوث ٣ حوادث خلال اليوم.

د- إحتمال حدوث حادثين على الأقل خلال اليوم الواحد.

الحل : $\mu = ٢$

أ- إحتمال حدوث حادث واحد خلال اليوم = د (١)

$$\because \text{ك}(\text{س}) = \frac{\text{هـ}^{-\mu} \times \mu^{\text{س}}}{\lfloor\underline{\text{س}}}$$

$$\therefore \text{ك}(١) = \frac{(٢٫٧١٨٢٨)^{-٢} \times (٢)^{١}}{\lfloor\underline{١}}$$

$$= \frac{٢}{(٢٫٧١٨٢٨)^{٢}}$$

$$= \frac{٢}{٧٫٣٨٩٠٥}$$

$$= ٫٢٧٠٦٧$$

ب- إحتمال عدم حدوث أى حادث = ك(صفر)

$$\therefore \text{ك}(\text{صفر}) = \frac{(٢٫٧١٨٢٨)^{-٢} \times (٢)^{\text{صفر}}}{\lfloor\underline{\text{صفر}}}$$

$$= \frac{١}{(٢٫٧١٨٢٨)^{٢}}$$

$$= \frac{١}{٧٫٣٨٩٠٥}$$

$$= ٫١٣٥٣٤$$

جـ- احتمال حدوث ٣ حوادث = ك(٣)

$$ك(٣) = \frac{(٢{,}٧١٨٢٨)^{-٢} \times (٢)^{٣}}{\lfloor ٣}$$

$$= \frac{٨}{٧{,}٣٨٩٠٥ \times ٦}$$

= ١٨٠٤٥ر

د- إحتمال حدوث حادثين على الأقل = إحتمال حدوث حادثين + إحتمال حدوث٣حوادث + إحتمال حدوث ٤ حوادث + ...

= ١- (إحتمال حدوث حادث واحد + إحتمال عدم حدوث أى حادث).

= ١ - (٢٧٠٦٧ر + ١٣٥٣٤ر)

= ١ - ٤٠٦٠١ر

= ٥٩٣٩٩ر

مثال٢: فيما يلى بيان عن توزيع عدد الوثائق حسب عدد الخسائر خلال عام ١٩٩٢ وذلك فى إحدى شركات التأمين المصرية:

عدد حالات الخسارة	عدد الوثائق
صفر	٧٤٤٩
١	٥٢١٣
٢	١٨٢٥
٣	٤٢٧
٤	٧٥
٥	١٠
٦	١

فإذا علمت أن توزيع عدد الخسائر قريب جداً من التوزيع البواسونى فاحسب:

أ - إحتمال حدوث ٣ خسائر خلال العام.

ب- إحتمال حدوث ٣ خسائر على الأقل خلال العام.

جـ- إحتمال حدوث ٣ خسائر على الأكثر خلال العام.

د- إحتمال عدم حدوث أي خسارة.

الحل: حيث أن متوسط عدد الحوادث غير معلوم فإنه يتم حسابه من العينة كما يلي:

عدد حالات الخسارة	عدد الوثائق	إجمالى حالات الخسارة
س	ك	س × ك
صفر	٧٤٤٩	صفر
١	٥٢١٣	٥٢١٣
٢	١٨٢٥	٣٦٥٠
٣	٤٢٧	١٢٨١
٤	٧٥	٣٠٠
٥	١٠	٥٠
٦	١	٦
المجموع	١٥٠٠٠	١٠٥٠٠

$\because \bar{س} = \frac{مجـ\ س\ ك}{مجـ\ ك}$

$= \frac{١٠٥٠٠}{١٥٠٠٠}$

$=$ ٧ر

ويمساواة المتوسط الفعلى $\bar{س}$ بالمتوسط النظرى μ

$\therefore \mu =$ ٧ر

أ- إحتمال حدوث ٣ خسائر خلال العام = ك(٣)

، $\because$ ك(س) $= \frac{هـ^{-\mu} \times \mu^{س}}{\lfloor س}$

∴ ك(٣) $= \frac{2.71828^{-7} \times 7^{3}}{\lfloor 3}$

$= 0.28388126$

ب- إحتمال حدوث ٣خسائر على الأقل خلال العام = إحتمال حدوث ٣ خسائر

+ إحتمال حدوث ٤ خسائر

+ إحتمال حدوث ٥ خسائر

+ إحتمال حدوث ٦ خسائر

إحتمال حدوث ٣ خسائر = ك(٣) $= \frac{2.71828^{-7} \times 7^{3}}{\lfloor 3} = 0.28388126$

إحتمال حدوث ٤ خسائر = ك(٤) $= \frac{2.71828^{-7} \times 7^{4}}{\lfloor 4} = 0.0049679$

إحتمال حدوث ٥ خسائر = ك(٥) $= \frac{2.71828^{-7} \times 7^{5}}{\lfloor 5} = 0.0069509$

إحتمال حدوث ٦ خسائر = ك(٦) $= \frac{2.71828^{-7} \times 7^{6}}{\lfloor 6} = 0.00081142$

∴ إحتمال حدوث ٣ خسائر على الأقل $= 0.28388126$

$+ 0.0049679$

$+ 0.0069509$

$+ 0.00081142$

$= 0.34132677$

جـ- إحتمال حدوث ٣ خسائر على الأكثر خلال العام = إحتمال حدوث ٣ خسائر

+ إحتمال حدوث خسارتين

+ إحتمال حدوث خسارة واحدة

+ إحتمال عدم حدوث أى خسارة

∴ إحتمال حدوث ٣ خسائر = $ك(٣) = \frac{\text{٢ر٧١٨٢٨}^{-\text{ر٧}} \times \text{ر٧}^{٣}}{\lfloor ٣}$ = ٠٢٨٣٨٨١٢٦ر

، إحتمال حدوث خسارتين = $ك(٢) = \frac{\text{٢ر٧١٨٢٨}^{-\text{ر٧}} \times \text{ر٧}^{٢}}{\lfloor ٢}$ = ١٢١٦٦٣٣٩٩ر

، إحتمال حدوث خسارة واحدة = $ك(١) = \frac{\text{٢ر٧١٨٢٨}^{-\text{ر٧}} \times \text{ر٧}^{١}}{\lfloor ١}$ = ٣٤٧٦٠٩٧١٢ر

، إحتمال عدم حدوث أى خسارة = د (صفر) = $\frac{\text{٢ر٧١٨٢٨}^{-\text{ر٧}} \times \text{ر٧}^{\text{صفر}}}{\lfloor \text{صفر}}$ = ٤٩٦٥٨٥٣٠٣ر

∴ إحتمال حدوث ٣ خسائر على الأكثر = ٠٢٨٣٨٨١٢٦ر

+ ١٢١٦٦٣٣٩٩ر

+ ٣٤٧٦٠٩٧١٢ر

+ ٤٩٦٥٨٥٣٠٣ر

= ٩٦٥٨٦٧٣٢٣ر

د- إحتمال عدم حدوث أى خسارة = ك(صفر) = $\frac{\text{٢ر٧١٨٢٨}^{-\text{ر٧}} \times \text{ر٧}^{\text{صفر}}}{\lfloor \text{صفر}}$ = ٤٩٦٥٨٥٣٠٣ر

مثال٣: فيما يلى بيان عن توزيع عدد الوثائق حسب عدد حالات الخسارة خلال سنة ١٩٩٠ وذلك فى إحدى شركات التأمين:

عدد حالات الخسارة	عدد الوثائق
صفر	١٧٥٤٩
١	١١٠٤
٢	٥٣
٣	٢
٤	صفر
المجموع	١٨٧٠٨

فإذا علمت أن توزيع الخسائر قريب جداً من التوزيع البواسونى فاحسب:

أ- إحتمال عدم حدوث أى خسارة خلال السنة.

ب- إحتمال حدوث خسارة واحدة خلال السنة.

جـ- إحتمال حدوث خسارتين.

د- إحتمال حدوث ٣ خسارات.

الحل: حيث أن متوسط التوزيع غير معلوم فإنه يتم حسابه من العينة كما يلى:

عدد حالات الخسارة	عدد الوثائق	إجمالى حالات الخسارة
س	ك	س × ك
صفر	١٧٥٤٩	صفر
١	١١٠٤	١١٠٤
٢	٥٣	١٠٦
٣	٢	٦
٤	صفر	صفر
المجموع	١٨٧٠٨	١٢١٦

$\because \bar{س} = \frac{مجـ\ س\ ك}{مجـ\ ك}$

$\therefore \bar{س} = \frac{١٢١٦}{١٨٧٠٨}$

= ٠٦٥ر٠

وبمساواة المتوسط النظرى μ بالمتوسط الفعلى $\bar{س}$

$\therefore \mu =$ ٠٦٥ر٠

أ- إحتمال عدم حدوث أى خسارة خلال السنة = ل(صفر)

$$ك(\text{صفر}) = \frac{(٢٫٧١٨٢٨)^{-٠٫٠٦٥} \times (٠٫٠٦٥)^{\text{صفر}}}{\text{صفر}!}$$

$$= \frac{١}{(٢٫٧١٨٢٨)^{٠٫٠٦٥}}$$

$$= \frac{١}{١٫٠٦٧١٥٩}$$

$$= ٠٫٩٣٧٠٦٧$$

ب- إحتمال حدوث خسارة واحد = د (١)

$$ك(١) = \frac{(٢٫٧١٨٢٨)^{-٠٫٠٦٥} \times (٠٫٠٦٥)^{١}}{١!}$$

$$= \frac{٠٫٠٦٥}{(٢٫٧١٨٢٨)^{٠٫٠٦٥}}$$

$$= \frac{٠٫٠٦٥}{١٫٠٦٧١٥٩}$$

$$= ٠٫٠٦٠٩٠٦$$

جـ- احتمال حدوث خسارتين = ك(٢)

$$ك(٢) = \frac{(٢٫٧١٨٢٨)^{-٠٫٠٦٥} \times (٠٫٠٦٥)^{٢}}{٢!}$$

$$= ٠٫٠٠١٩٧٩٥٥٥$$

د- احتمال حدوث ٣ خسائر = د (٣)

$$ك(٣) = \frac{(٢٫٧١٨٢٨)^{-٠٫٠٦٥} \times (٠٫٠٦٥)^{٣}}{٢!}$$

$$= ٠٫٠٠٠٠٤٢٨٩$$

. **حل أخر:** بإستخدام العلاقة التتابعية:

∵ ك(س+١) = د (س) × $\frac{\mu}{\text{س}+١}$

، ∵ ك(صفر) = ٩٣٧٠٦٧ر

∴ ك (١) = د (صفر) × $\frac{\mu}{١}$

= ٩٣٧٠٦٧ر × $\frac{\text{٠٦٥ر}}{١}$

= ٠٦٠٩٠٦ر

، (٢) = ك(١) × $\frac{\mu}{٢}$

ك(٢) = ٠٦٠٩٠٦ر × $\frac{\text{٠٦٥ر}}{٢}$

= ٠٠١٩٧٩٥٥٥ر

، ك(٣) = ك(٢) × $\frac{\mu}{٣}$

= $\frac{\text{٠٠١٩٧٩٥٥٥ر} \times \text{٠٦٥ر}}{٢}$

= ٠٠١٩٧٩٦ر

إستخدام توزيع بواسون كتقريب لتوزيع ذى الحدين:

يستخدم توزيع بواسون كتقريب جيد لتوزيع ذى الحدين فى حالة توافر شرطين:

الشرط الأول: أن الإحتمال يكون صغيراً جداً (ل تمثل إحتمال النجاح وقيمتها صغيرة جداً)

الشرط الثانى: أن عدد مرات إجراء التجربة يكون كبيراً جداً (~ تكون كبيرة)

وفى هذه الحالة فإنه يتم إستخدام توزيع بواسون فى حساب الإحتمالات المختلفة والخاصة بتوزيع ذى الحدين مع وضع μ = ~ × ل

ويمكن إثبات ذلك كما يلي:

∵ دالة ذى الحدين $د(س) = \binom{ن}{س} ل^{س} (١-ل)^{ن-س}$

$$= \frac{|\underline{ن}}{|\underline{س} \times |\underline{ن-س}} \times ل^{س} (١-ل)^{ن-س}$$

$$= \frac{١}{|\underline{س}} [ن(ن-١)(ن-٢)...(ن-س-١) ل^{س} (١-ل)^{ن-س}]$$

ويأخذ ن عامل مشترك من الحدود داخل القوس ينتج أن:

$$د(س) = \frac{١}{|\underline{س}} [١(١-\frac{١}{ن})(١-\frac{٢}{ن}) \times ... \times (١-\frac{س-١}{ن})] \times ن^{س} \times ل^{س} \times (١-ل)^{ن-س}$$

ويوضع $ن \times ل = \mu$

$$\therefore د(س) = \frac{١}{|\underline{س}} [١(١-\frac{١}{ن})(١-\frac{٢}{ن}) \times ... \times (١-\frac{س-١}{ن})] \times \mu^{س} \times (١-\frac{\mu}{ن})^{ن-س}$$

ويأخذ نهاية المقدار السابق عندما تؤول ن إلى مالا نهاية ينتج أن:

$$\text{نها}_{ن \to \infty} د(س) = \text{نها} \frac{١}{|\underline{س}} [١(١-\frac{١}{ن})(١-\frac{٢}{ن}) ... (١-\frac{س-١}{ن})] \times \mu^{س} \times (١-\frac{\mu}{ن})^{ن} (١-\frac{\mu}{ن})^{-س}$$

$= \frac{١}{|\underline{س}} \times \mu^{س} \times هـ^{-\mu}$ وهى دالة بواسون

والمثال التالى يوضح أهمية الاستفادة من هذا التقريب.

مثال ٤: إذا كان من بين كل ٢٠٠٠ وحدة منتجة يوجد ٤٠ وحدة معيبة، وإذ سحبنا ١٠٠ وحدة من انتاج هذا المصنع مع الاحلال احسب احتمال أن يكون من بينها ٣ وحدات معيبة.

الحل: إحتمال الحصول على وحدة واحدة معيبة من انتاج المصنع $= \frac{٤٠}{٢٠٠٠} = ٢٠ر$

إحتمال الحصول على ٣ وحدات يعبئة من بين انتاج ١٠٠ وحدة $= \binom{١٠٠}{٣} (٢٠ر)^{٣} (٩٨ر)^{٩٧}$

$$= \frac{|\underline{١٠٠}}{|\underline{٣} \, |\underline{٩٧}} \times (٢٠ر)^{٣} (٩٨ر)^{٩٧}$$

$= ١٨٢٣ر$

ونلاحظ أن حساب مفكوك المقدار السابق يحتاج لمجهود كبير، ولكن طالما أن الإحتمال صغير (ل=٠٢ر) وأن قيمة ~ كبيرة (~ =١٠٠).

فإنه يمكن إستخدام توزيع بواسون كتقريب جيد وذلك على النحو التالى:

$$\therefore \text{د (س)} = \frac{\text{هـ}^{-\mu} \times \mu^{\text{س}}}{\underline{|\text{س}}}$$

$$\text{،} \quad \mu = \sim \times \text{ل}$$

$$= ١٠٠ \times ٠٢ر$$

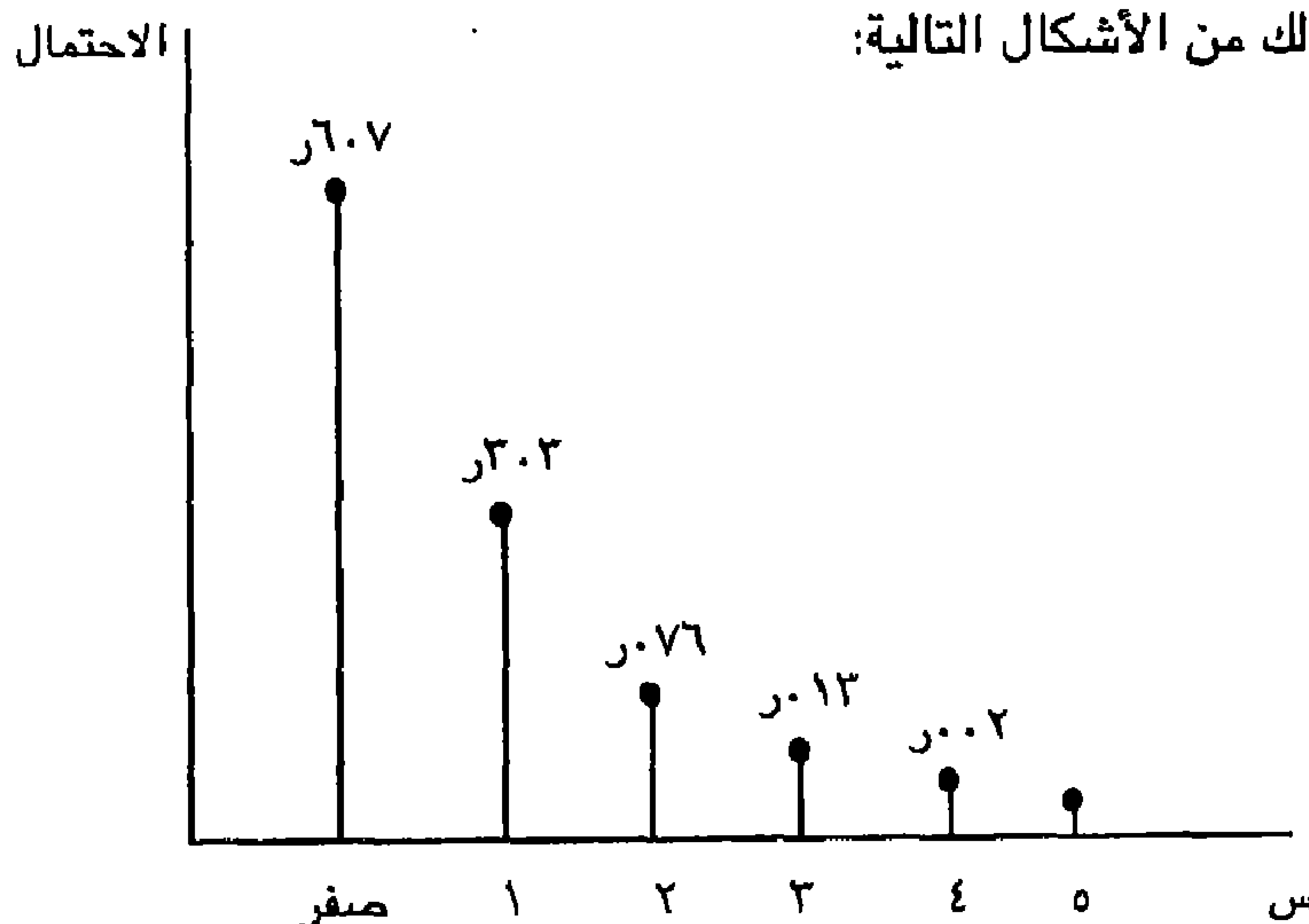
$$= ٢$$

$$\therefore \text{د}(٣) = \frac{(٢ر٧١٨٢٨)^{-٢} \times ٢^{٣}}{\underline{|٣}}$$

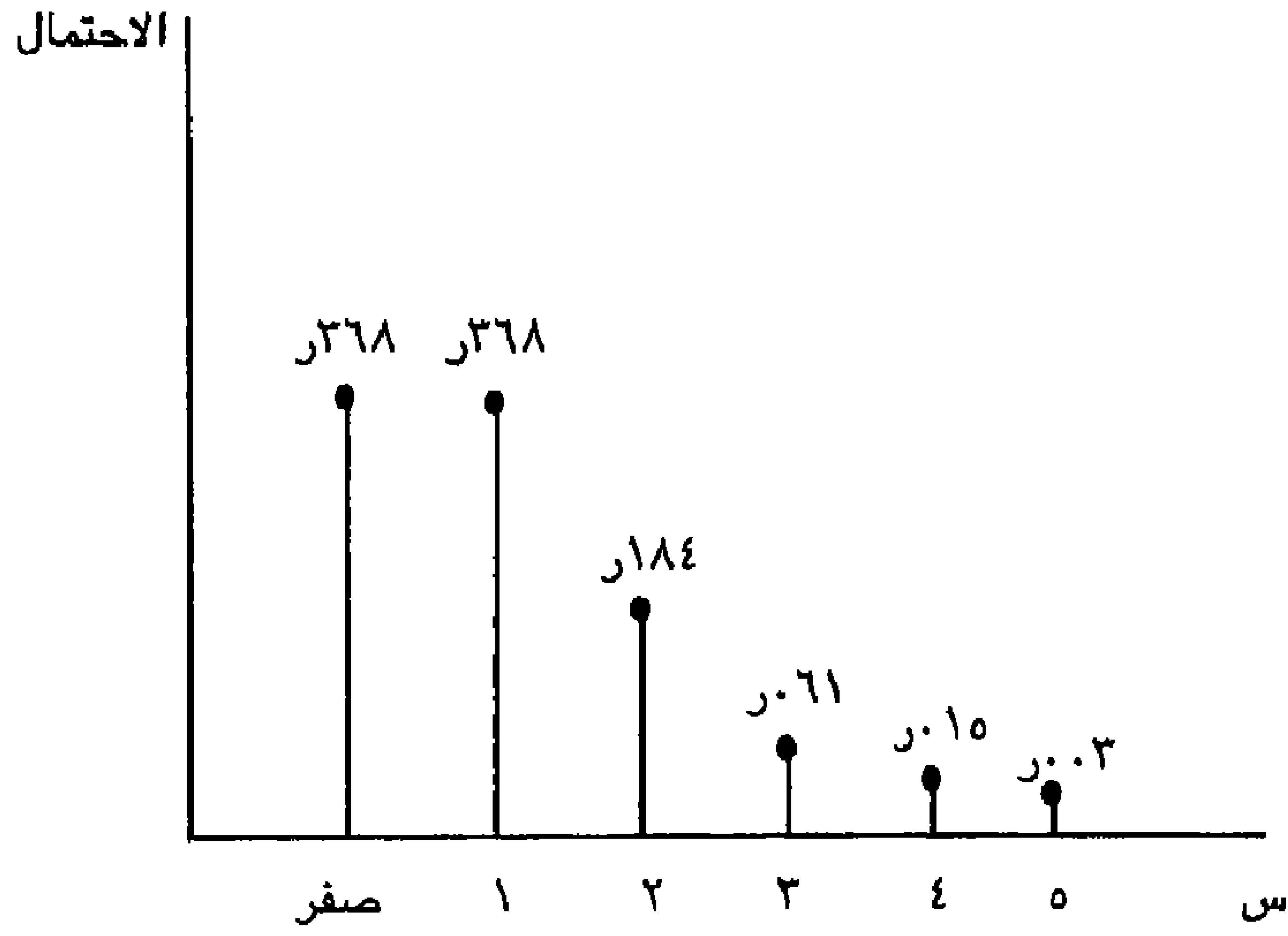
$$= \frac{٨}{٦ \times (٢ر٧١٨٢٨)^{٢}}$$

= ١٨٠٥ر وهى قريبة من النتيجة السابقة

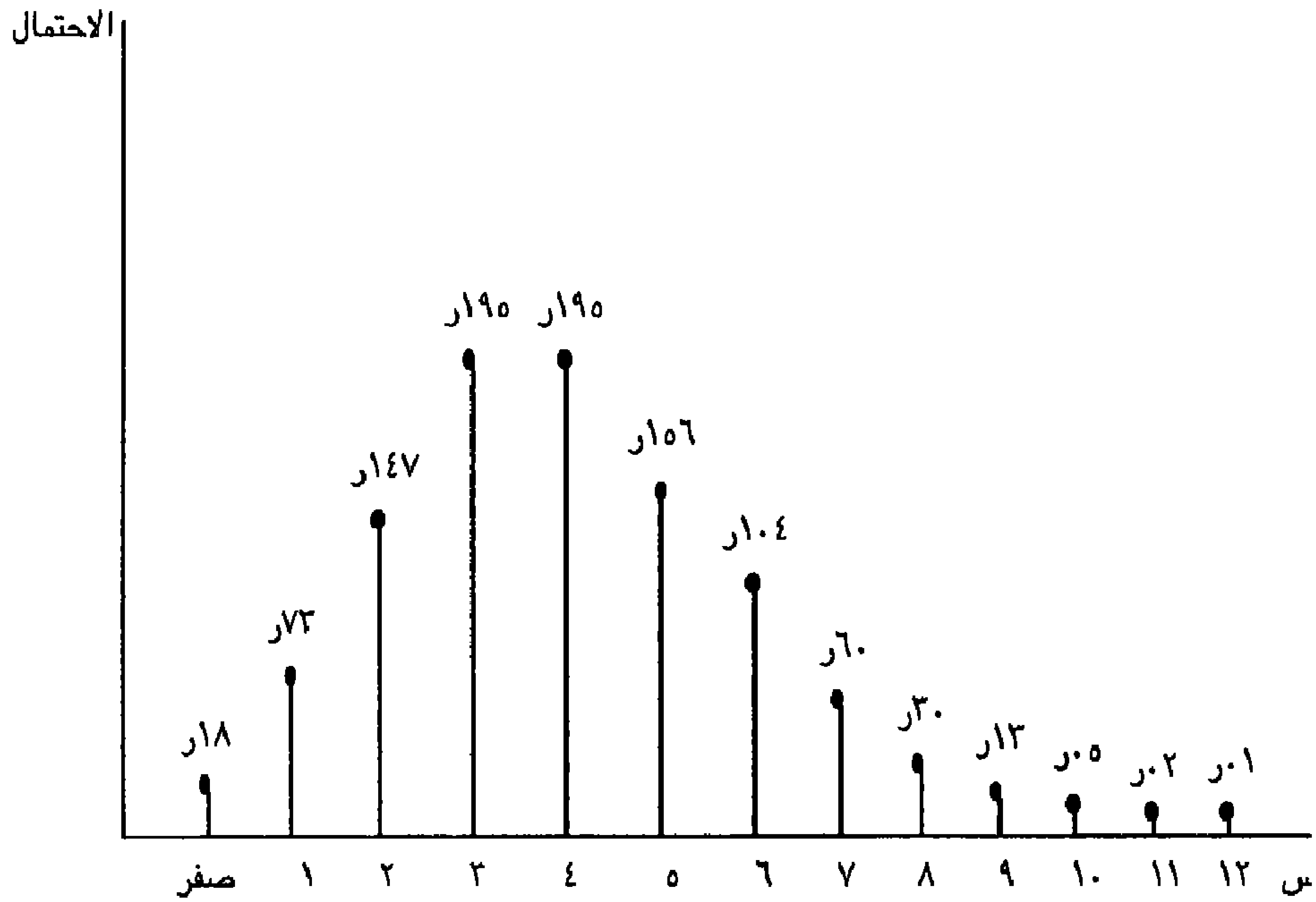
ملاحظة: توزيع بواسون من التوزيعات الملتوية جهة اليمين ويتوقف شكل المنحنى الممثل لدالة كثافة الإحتمال على قيمة μ وكلما زادت قيمتها كلما إقترب التوزيع من التماثل ويتضح ذلك من الأشكال التالية:



شكل رقم ١ دالة كثافة الاحتمال عند $\mu = \frac{١}{٢}$



شكل رقم ٢ دالة كثافة الاحتمال عند μ = ١



شكل رقم ٣ دالة كثافة الاحتمال عند μ = ٤

أسئلة على الوحدة الدراسية السادسة

١- فيما يلى بيان عن نتائج فرع السطو خلال عام ١٩٩١ بإحدى شركات التأمين المصرية:

عدد الخسائر	عدد الوثائق
صفر	٨٤٤١
١	٥٣١
٢	٢٥
٣	٣
٤	صفر
المجموع	٩٠٠٠

فإذا علمت أن توزيع عدد الوثائق قريب جداً من التوزيع البواسونى فاحسب:

أ- إحتمال حدوث خسارة واحدة خلال العام للوثيقة الواحدة.

ب- إحتمال حدوث ٣ خسائر خلال العام للوثيقة الواحدة.

جـ- إحتمال حدوث خسارتين على الأقل خلال العام للوثيقة الواحدة.

د- عدد الوثائق التى ينتج عنها حادثين خلال عام ١٩٩٢ إذا كان عدد الوثائق المتوقع خلال عام ١٩٩٢ هو ١٤٠٠٠ وثيقة.

٢- إذا علمت أن عدد الحوادث فى فرع الحريق يتبع توزيع بواسون بمتوسط ٠٦ر٠ فاحسب:

أ- إحتمال حدوث حادثين خلال السنة.

ب- إحتمال حدوث حادثين على الأقل خلال السنة.

جـ- إحتمال عدم حدوث أى حادث خلال السنة.

د- عدد الوثائق التى ينتج عنها ٣ حوادث إذا كان عدد الوثائق المتوقع خلال العام القادم هو ٣٠٠٠٠ وثيقة.

الوحدة الدراسية السابعة
توزيع ذى الحدين السالب
كتوزيع مناسب لعدد الحوادث

الوحدة الدراسية السابعة

موضوعها:

توزيع ذى الحدين السالب كتوزيع مناسب لعدد الحوادث.

هدفها:

تعريف الطالب بكيفية إستخدام توزيع ذى الحدين السالب كتوزيع مناسب لعدد الحوادث.

عناصرها:

- خصائص توزيع ذى الحدين السالب.

توزيع ذى الحدين السالب: Negative binomial Distribution

عند دراستنا لتوزيع ذى الحدين كنا أمام عدد ثابت من المحاولات (عدد مرات إجراء التجربة أو عدد الوحدات المنتجة) وهو ما رمزنا له بالرمز ∽ وكنا نهتم بعدد مرات النجاح ورمزنا لها بالرمز س.

وبالنسبة لتوزيع ذى الحدين السالب فإنه يشابه توزيع ذى الحدين فيما عدا أنه يتم التركيز على عدد المحاولات (وليس عدد مرات النجاح) المطلوبة للحصول على عدد ثابت من حالات النجاح، وبمعنى آخر فإنه فى ظل توزيع ذى الحدين يكون عدد المحاولات ثابت وعدد حالات النجاح هو المتغير أما فى ظل توزيع ذى الحدين السالب فإن عدد حالات النجاح هو الثابت ويكون المتغير هو عدد مرات إجراء التجربة أو عدد المحاولات أى يمثل المتغير العشوائى ونظل نكرر التجربة حتى نحصل على العدد اللازم والثابت لحالات النجاح ويكون المطلوب هو تحديد هذا العدد من المحاولات حيث تنتهى التجربة بالحصول على عدد حالات النجاح المطلوبة وبالتالى فإن عدد مرات التجربة أو عدد المحاولات يمثل المتغير العشوائى ويرمز له بالرمز ∽ حيث ∽= ر، ر+ ١، ر+ ٢، ...

وللوصول إلى دالة كثافة الإحتمال عندما يأخذ عدد المحاولات وهو ∽ القيم ر، ر+١، ر+٢ ، .... وأيضا عندما يكون عدد حالات الفشل س والتى تأخذ القيم صفر، ١، ٢، ... فإن هذا يعني أن عدد مرات التجربة وهو∽ = (ر+س) لأن المطلوب هو الحصول على عدد حالات من النجاح ر بإحتمال $ل^{ر}$ وبالتالى فإن آخر محاولة لابد أن تكون نجاح وهذا يحدث باحتمال (ل) وأن المحاولات الآخرى السابقة للمحاولة الأخيرة عددها (س+ر−١) وتحتوى على (ر−١) حالات نجاح، س حالات فشل وهذا يحدث باحتمال:

$$ك(س) = \binom{س+ر-١}{ر-١} ل^{ر-١} (١-ل)^{س} \quad ، س= صفر، ١، ٢، $$

وحيث أن المحاولات مستقلة فإن المحاولات السابقة كلها وقبل الحصول على حالة النجاح الأخيرة بالإضافة إلي المحاولة الأخيرة الناجحة تمثلها دالة كثافة إحتمال عبارة عن حاصل ضرب الدالتين.

أى $\text{د}(س) = \binom{س+ر-1}{ر-1} ل^{ر-1} (1-ل)^{س} \times ل$

$\therefore \text{د}(س) = \binom{س+ر-1}{ر-1} ل^{ر-1} (1-ل)^{س}$ ، س= صفر، ١، ٢،

وحيث أن $\binom{ن}{س} = \binom{ن}{ن-س}$

$$\therefore \binom{س+ر-1}{ر-1} = \binom{س+ر-1}{س}$$

وبالتالى فإن الدالة تصبح كما يلى:

$$\text{د}(س) = \binom{س+ر-1}{ر-1} ل^{ر} (1-ل)^{س}$$

وتسمى الدالة السابقة بتوزيع ذى الحدين السالب لأنها عبارة عن مفكوك الدالة :

$$\binom{-ر}{س} ل^{ر} [-(1-ل)]^{س} = ل^{ر} [1-(1-ل)]^{-ر}$$

حيث ر ، ل هما معلمتا التوزيع، س هى متغير عشوائى يأخذ القيم الصحيحة:

أى أن س = صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... إلى ∞

، المتوسط $\mu = \frac{ر(1-ل)}{ل}$

، التباين $\sigma^2 = \frac{ر(1-ل)}{ل^2}$

والمثال التالى يوضح كيفية تطبيق واستخدام هذا التوزيع فى الحياة العملية وبصفة خاصة فى تقدير الإحتمالات وعدد الحوادث بالنسبة لشركات التأمين.

مثال:

إذا علمت أن عدد الحوادث فى فرع تأمين السيارات يتبع توزيع ذى الحدين السالب بمتوسط ٠٦٥.ر وتباين ٠٦٧.ر وأن عدد الوثائق فى هذا الفرع قد بلغ ١٨٧٠٨ وثيقة وذلك خلال عام ١٩٩٠.

إحسب:

أ- إحتمال عدم حدوث أى حادث خلال العام.

ب- إحتمال حدوث حادث واحد خلال العام.

جـ- إحتمال حدوث حادثين خلال العام.

د- إحتمال حدوث ٣ حوادث خلال العام.

هـ- إحتمال حدوث ٤ حوادث خلال العام.

و- إحتمال حدوث حادثين على الأقل.

ز- عدد الوثائق التى ينتج عنها حادثين.

ح- عدد الوثائق التى لا ينتج عنها أى حادث.

الحل:

$$\therefore \text{المتوسط} = \frac{\text{ر}(\text{١}-\text{ل})}{\text{ل}}$$

$$\text{، التباين} = \frac{\text{ر}(\text{١}-\text{ل})}{\text{ل}^{\text{٢}}}$$

وبالتعويض عن المتوسط والتباين بقيمتيهما ينتج أن.

$$\text{٠٫٦٥} = \frac{\text{ر}(\text{١}-\text{ل})}{\text{ل}}$$

$$\text{، ٠٫٦٧} = \frac{\text{ر}(\text{١}-\text{ل})}{\text{ل}^{\text{٢}}}$$

وبقسمة المعادلة الأولى على المعادلة الثانية:

$$\frac{\text{٠٫٦٥}}{\text{٠٫٦٧}} = \frac{\text{ر}(\text{١}-\text{ل})}{\text{ل}} \times \frac{\text{ل}^{\text{٢}}}{\text{ر}(\text{١}-\text{ل})}$$

$$\therefore \text{ل} = \text{٠٫٩٧٠١٤٩}$$

وبالتعويض بقيمة ل فى المعادلة الأولى:

$$٫٠٦٥ = \frac{\text{ر}(١-٫٩٧٠١٤٩)}{٫٩٧٠١٤٩}$$

$$٫٠٦٣٠٥٩٦٨٥ = ٫٠٢٩٨٥١ \times \text{ر}$$

$$\therefore \text{ر} = \frac{٫٠٦٣٠٥٩٦٨٥}{٫٠٢٩٨٥١}$$

$$= ٢٫١١٢٤٨$$

∴ دالة ذى الحدين السالب تأخذ الشكل الآتى:

$$\text{ك}(\text{س}) = \binom{\text{س}+٢٫١١٢٤٨-١}{\text{س}} \times ٫٩٧٠١٤٩^{٢٫١١٢٤٨} \times (٫٠٢٩٨٥١)^{\text{س}}$$

وحيث أن قيمة ر بها كسور فإنه يصعب إستخدام المعادلة بصورتها الحالية إلا أنه توجد علاقة هامة يمكن من خلالها الحصول على الإحتمالات المختلفة وذلك سواء كانت قيمة ر كسراً أو عدداً صحيحاً وهى:

$$\text{ك}(\text{صفر}) = \text{ل}^{\text{ر}}$$

$$\text{ك}(١) = \frac{\text{ك}(\text{صفر}) \times \text{ر} \times (١-\text{ل})}{١}$$

$$\text{ك}(٢) = \frac{\text{ك}(١) \times (\text{ر}+١) \times (١-\text{ل})}{٢}$$

$$\text{ك}(٣) = \frac{\text{ك}(٢) \times (\text{ر}+٢) \times (١-\text{ل})}{٣}$$

$$\text{ك}(\text{س}) = \frac{\text{ك}(\text{س}-١) \times (\text{س}+\text{ر}-١) \times (١-\text{ل})}{\text{س}}$$

وبالتعويض بقيمتى ر ، ل السابق الحصول عليهما ينتج أن:

$$\text{ك}(\text{صفر}) = ٫٩٧٠١٤٩^{٢٫١١٢٤٨} = ٫٩٣٧٩٨٦$$

$$\text{ك}(١) = ٫٩٣٧٩٨٦ \times ٢٫١١٢٤٨ \times ٫٠٢٩٨٥١$$

$$= ٫٠٥٩١٤٩$$

$$ك(٢) = \frac{٠٫٠٥٩١٤٩ \times ٣٫١١٢٤٨ \times ٠٫٢٩٨٥١}{٢}$$

= ٠٫٠٠٢٧٤٨

$$ك(٣) = \frac{٠٫٠٠٢٧٤٨ \times ٤٫١١٢٤٨ \times ٠٫٢٩٨٥١}{٣}$$

= ٠٫٠٠٠١١٢

$$ك(٤) = \frac{٠٫٠٠٠١١٢ \times ٥٫١١٢٤٨ \times ٠٫٢٩٨٥١}{٤}$$

= ٠٫٠٠٠٠٠٤

أ - إحتمال عدم حدوث أى حادث = ٠٫٩٣٧٩٨٦

ب- وإحتمال حدوث حادث واحد = ٠٫٠٥٩١٤٩

جـ- وإحتمال حدوث حادثين = ٠٫٠٠٢٧٤٨

د- وإحتمال حدوث ٣ حوادث = ٠٫٠٠٠١١٢

هـ- وإحتمال حدوث ٤ حوادث = ٠٫٠٠٠٠٠٤

و- إحتمال حدوث حادثين على الأقل = إحتمال حدوث حادثين + إحتمال حدوث ٣حوادث

+ إحتمال حدوث ٤ حوادث + ...

إلى إحتمال حدوث ∞ من الحوادث

= ١- [احتمال حدوث حادث واحد + إحتمال عدم حدوث أى حادث]

= ١- [٠٫٩٣٧٩٨٦ + ٠٫٠٥٩١٤٩]

= ١ - ٠٫٩٩٧١٣٥ = ٠٫٠٠٢٨٦٥

ز- عدد الوثائق التى ينتج عنها حادثين = احتمال حدوث حادثين × عدد الوثائق كلها

= ٠٫٠٠٢٧٤٨ × ١٨٧٠٨ = ٥١ وثيقة

حـ- عدد الوثائق التى لا ينتج عنها أى حادث = إحتمال عدم حدوث أى حادث × عدد الوثائق كلها

= ٩٣٧٩٨٦ر ١٨٧٠٨ ×

= ١٧٥٤٨ وثيقة

مثال ٢: إذا علمت أن عدد الحوادث فى فرع السطو بشركة مصر للتأمين يتبع توزيع ذى الحدين السالب وبدراسة عدد الوثائق حسب عدد الحوادث خلال العام السابق ١٩٩٢ حصلنا على البيانات التالية:

عدد الحوادث	عدد الوثائق
صفر	١٧٥٤٩
١	١١٠٤
٢	٥٣
٣	٢
٤	صفر
المجموع	١٨٧٠٨

فإحسب الإحتمالات الآتية: أ- إحتمال حدوث حادثين فقط خلال العام.

ب- إحتمال حدوث حادثين على الأقل خلال العام.

جـ- إحتمال حدوث حادثين على الأكثر خلال العام.

د- عدد الوثائق التى تتعرض لحادثين خلال العام القادم ١٩٩٣ إذا كان عدد الوثائق المتوقع هو ٢٠٠٠٠ وثيقة.

الحل:

يتم أولاً حساب متوسط وتباين توزيع عدد الحوادث حتى يمكن إستخدامهما فى إيجاد قيمتى μ ، σ (معلمتى التوزيع) وبعد ذلك يتم حساب الإحتمالات المختلفة وذلك على النحو التالى:

عدد الحوادث	عدد الوثائق	عدد الحوادث × عدد الوثائق	(عدد الحوادث)^{٢} × عدد الوثائق
س	ك	س × ك	س^{٢} × ك
صفر	١٧٥٤٩	صفر	صفر
١	١١٠٤	١١٠٤	١١٠٤
٢	٥٣	١٠٦	٢١٢
٣	٢	٦	١٨
٤	صفر	صفر	صفر
المجموع	١٨٧٠٨	١٢١٦	١٣٣٤

$$\because \bar{س} = \frac{مجـ\ س\ ك}{مجـ\ ك}$$

$$\therefore \bar{س} = \frac{١٢١٦}{١٨٧٠٨} = ٠٦٥ر$$

$$،\ ع^{٢} = \frac{مجـ\ س^{٢}\ ك - \left(\frac{مجـ\ س\ ك}{مجـ\ ك}\right)^{٢}}{مجـ\ (ك-١)}$$

$$= \frac{١٣٣٤ - \frac{(١٢١٦)^{٢}}{١٨٧٠٨}}{١٨٧٠٧} = ٠٧١ر$$

وبمساواة المتوسط والتباين الفعليين بالمتوسط والتباين النظريين ينتج أن:

$$٠٦٥ر = \frac{ر\ (١-ل)}{ل} \quad (١)$$

$$،\ ٠٧١ر = \frac{ر\ (١-ل)}{ل^{٢}} \quad (٢)$$

وبقسمة المعادلة (١) على المعادلة (٢) ينتج أن:

$$\frac{\bar{\text{س}}}{\text{ع}^{٢}} = \frac{\text{ر}(١-\text{ل})}{\text{ل}} \times \frac{\text{ل}^{٢}}{\text{ر}\ (١-\text{ل})}$$

$$\frac{\text{٠٦٥ر}}{\text{٠٦٧١ر}} = \text{ل}$$

∴ ل = ٩٦٨٩ر

وبالتعويض فى معادلة (١) بقيمة ل ينتج أن:

$$\text{٠٦٥ر} = \frac{\text{ر} \times (١ - \text{٩٦٨٩ر})}{\text{٩٦٨٩ر}}$$

∴ ر = ٢٫٠٢٥ر

وبالتعويض بقيمتى ر ، ل فى المعادلات الخاصة بحساب الإحتمالات المختلفة نحصل على ما يلى:

∴ ك (صفر) = $\text{ل}^{\text{ر}}$

= $\text{٩٦٨٩ر}^{\text{٢٫٠٢٥ر}}$ = ٩٨٠٢٦ر

، ك(١) = ك(صفر) × ر (١ – ل)

= ٩٣٨٠٢٦ر × ٢٫٠٢٥ر × ٠٣١١ر = ٠٥٩٠٧٥ر

$$\text{، ك(٢)} = \frac{\text{ك(١)} \times (\text{ر}+١)\ (١ - \text{ل})}{٢}$$

$$= \frac{\text{٠٥٩٠٧٥ر} \times \text{٣٫٠٢٥ر} \times \text{٠٣١١ر}}{٢} = \text{٠٠٢٧٧٩ر}$$

$$\text{، ك(٣)} = \frac{\text{ك(٢)} \times (\text{ر}+٢)\ (١ - \text{ل})}{٣}$$

$$= \frac{\text{٠٠٢٧٧٩ر} \times \text{٤٫٠٢٥ر} \times \text{٠٣١١ر}}{٣} = \text{٠٠٠١١٧ر}$$

أ- إحتمال حدوث حادثين فقط خلال العام = ٠٠٢٧٧٩ر

ب- إحتمال حدوث حادثين على الأقل خلال العام = ٠٠٢٧٧٩ر + ٠٠٠١١٧ر= ٠٠٢٨٩٦ر

جـ- إحتمال حدوث حادثين على الأكثر خلال العام = ٩٨٠٢٦ر + ٠٥٩٠٧٥ر + ٠٠٢٧٧٩ر

= ١ - ٠٠٠١١٧ر = ٩٩٩٨٨٣ر

د- عدد الوثائق التى تتعرض لحادثين خلال العام القادم إذا كان عدد الوثائق المتوقع ٢٠٠٠٠ وثيقة

= إحتمال حدوث حادثين × عدد الوثائق

= ٠٠٢٧٧٩ر × ٢٠٠٠٠ = ٥٦ وثيقة

أسئلة على الوحدة الدراسية السابعة

١- إذا علمت أن عدد الحوادث فى فرع الحريق يتبع توزيع ذى الحدين السالب فإذا كانت النتائج خلال العام السابق كما يلى:

عدد الحوادث	عدد الوثائق
صفر	٨٤٠٠
١	٧٨٧
٢	٧٥
٣	٦
٤	٢

إحسب الإحتمالات الآتية: أ- عدم حدوث أى حادث خلال العام.

ب- حدوث حادثين فقط خلال العام.

جـ- حدوث حادثين على الأقل خلال العام.

٢- إذا علمت أن عدد الحوادث فى فرع الحريق يتبع توزيع ذى الحدين السالب بمتوسط ٠٧ر وتباين ٠٧٣ر فاحسب:

أ- إحتمال حدوث حادثين فقط خلال العام.

ب- إحتمال حدوث حادثين على الأقل خلال العام.

جـ- إحتمال عدم حدوث أى حادث خلال العام

د- عدد الوثائق التى ينتج عنها ٣ حوادث خلال العام القادم إذا كان عدد الوثائق المتوقع هو ٣٠٠٠٠ وثيقة.

الوحدة الدراسية الثامنة

التوزيع الطبيعي

الوحدة الدراسية الثامنة

موضوعها: التوزيع الطبيعى

هدفها : تعريف الدارس بكيفية استخدام التوزيع الطبيعى فى حساب الاحتمالات المختلفة وخاصة ما يتعلق بمبالغ التأمين .

عناصرها: - خصائص التوزيع الطبيعى

- خصائص التوزيع الطبيعى المعيارى

- نظرية النزعة المركزية

التوزيع الطبيعى: Normal Distribution

يعتبر التوزيع الطبيعى من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة ان لم يكن أهمها على الإطلاق ذلك لأن العديد من الظواهر كالأطوال والأوزان تخضع لهذا التوزيع ، كما أن معظم التوزيعات تؤول الى التوزيع الطبيعى عندما يزيد حجم العينة ، كما أن العديد من الاختبارات الاحصائية تعتمد عليه (إختبارات الفروض الإحصائية وإنشاء فترات الثقة) بالإضافة إلى أهميته فى علم العينات.

وهو توزيع متماثل تماماً بمعنى أنه إذا أسقطنا عمودا من قمته فإنه يقسم دالة كثافة الاحتمال إلى نصفين متطابقين تماماً ، وتأخذ دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعى الشكل التالى:

$$د(س) = \frac{١}{\sqrt{٢ ط}\ \sigma} هـ^{-\frac{(س - \mu)^٢}{٢ \sigma^٢}} \quad , \quad - \alpha < س < \alpha$$

حيث ط = ٣٫١٤٢٨ ، هـ = ٢٫٧١٨٢٨

ويعتمد هذا التوزيع على معلمتين هما μ ، σ أى المتوسط والإنحراف المعيارى على التوالى فالأول مقياس للموضع والثانى مقياس للتشتت

خصائص التوزيع الطبيعى: للتوزيع الطبيعى مجموعة من الخصائص من أهمها:

١- المنحنى متماثل حول الوسط الحسابى أى عند س = μ

٢- يصل المنحنى إلى قمته (نهايته العظمى) عندما س = μ

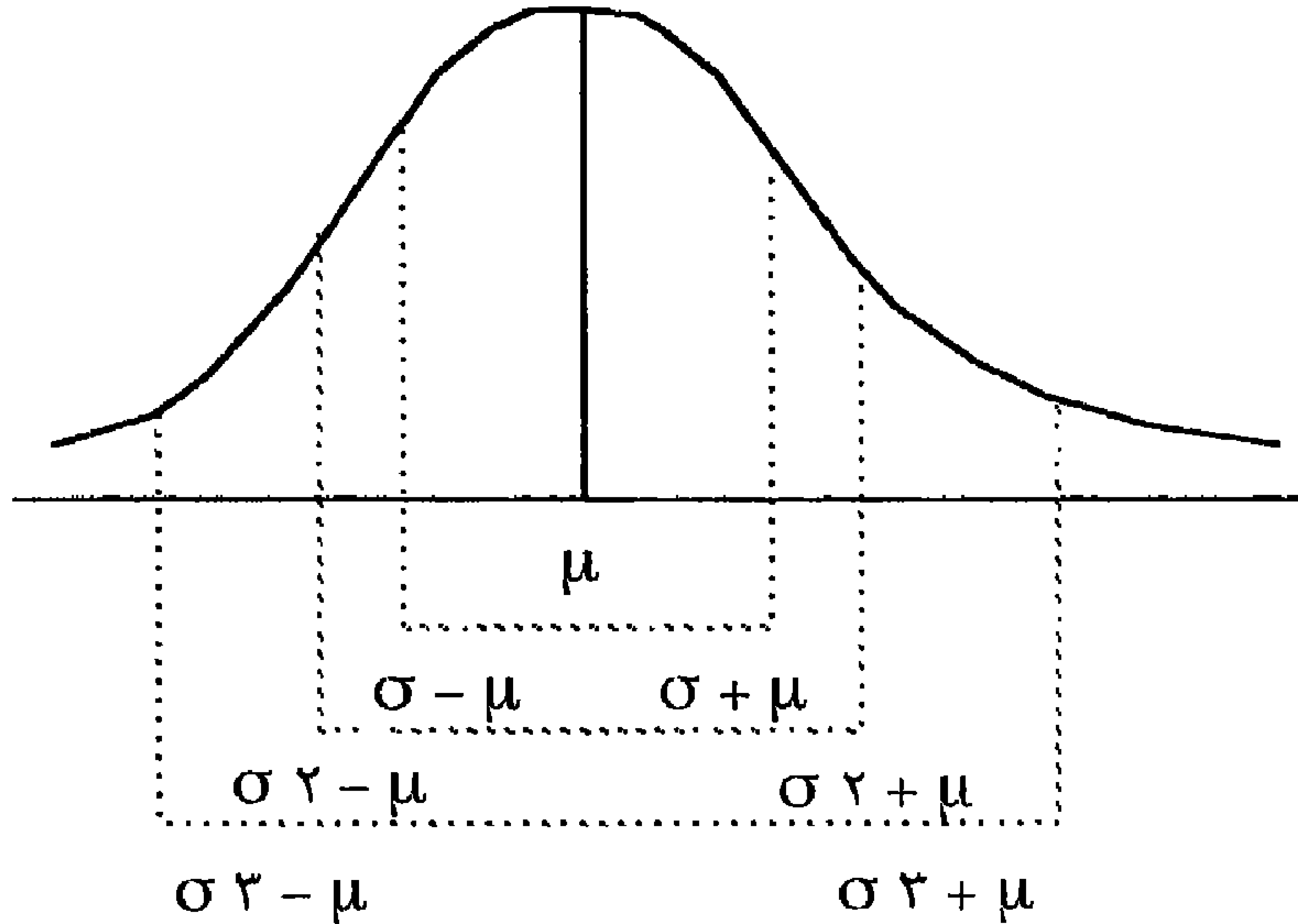
٣- الوسط والوسيط والمنوال لهذا التوزيع قيمتها متساوية

٤- المساحة تحت المنحنى تساوى واحد صحيح أى أن قيمة تكامل دالة كثافة الاحتمال من $- \alpha$ الى $+ \alpha$ تساوى واحد صحيح.

٥- المساحة تحت المنحنى والمحصورة بين: س = $\mu - \sigma$ ، س = $\mu + \sigma$ تساوى ٦٨٫٢٧٪ من المساحة تحت المنحنى أى أن ٦٨٫٢٧ ٪ من قيم المتغير العشوائى تقع داخل هذه

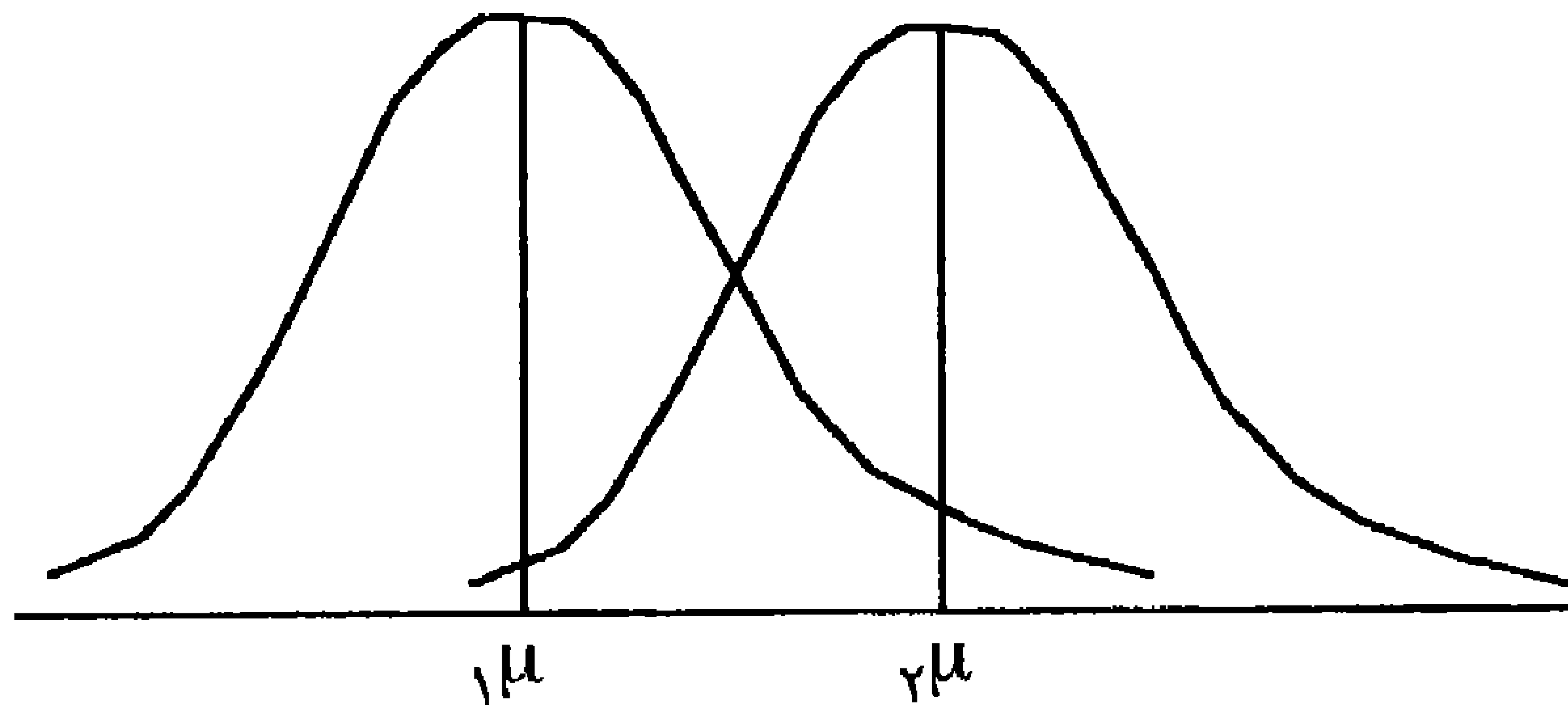
الفترة ، والمحصورة بين س = $\mu - ٢\sigma$ ، س = $\mu + ٢\sigma$ ، تساوى ٩٥ر٤٥٪ من المساحة تحت المنحنى ، وأخيرا فإن ٩٩ر٧٣٪ من المساحة تحت المنحنى تقع بين س = $\mu - ٣\sigma$ ، س = $\mu + ٣\sigma$

وذلك كما هو موضح بالشكل التالى:



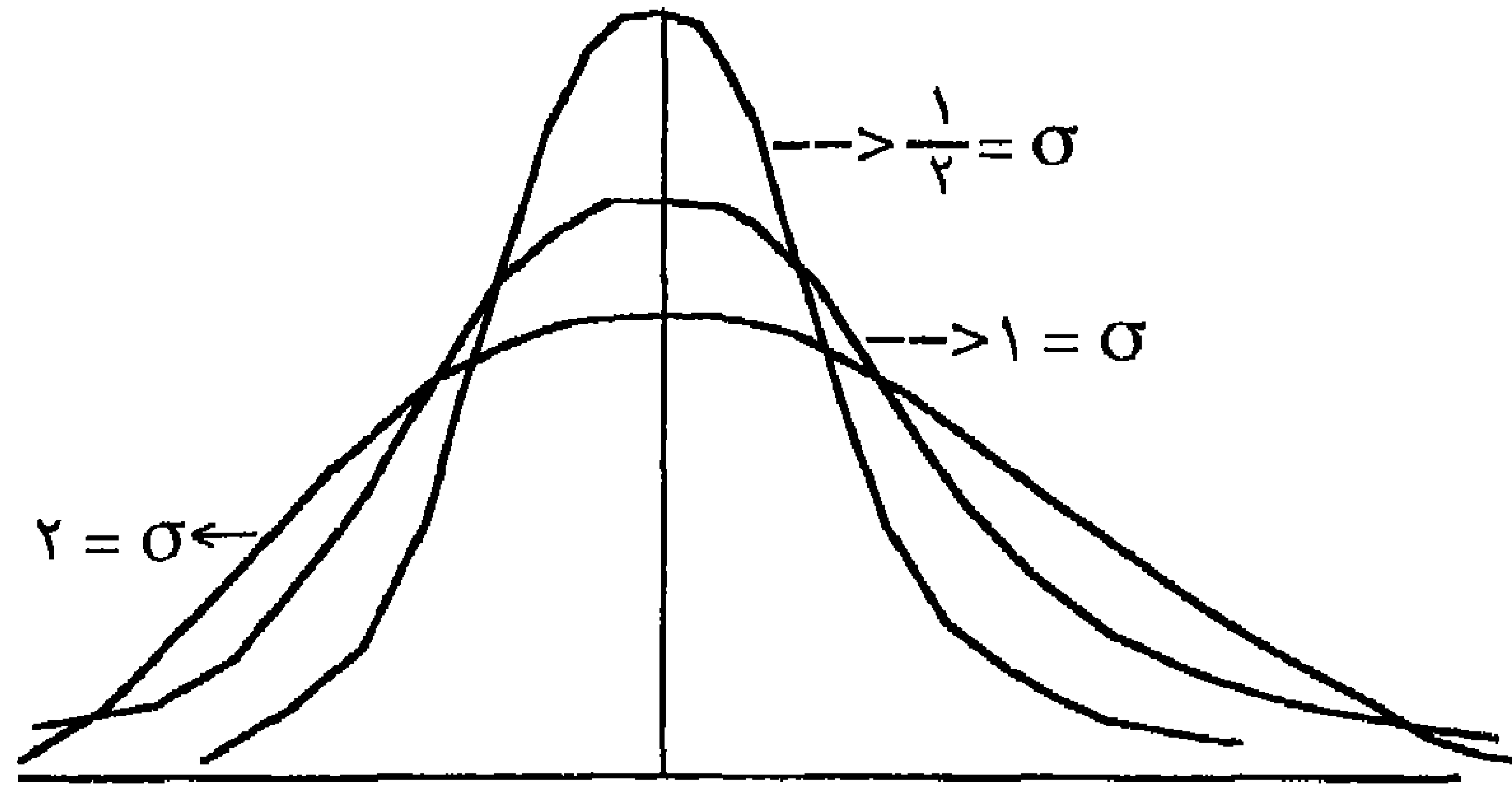
شكل رقم ١ دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعى

٦- كما سبق أن ذكرنا فإن دالة التوزيع الطبيعى دالة فى μ ، σ ولذلك فإنه بتغير قيمتهما فإننا نحصل على منحنيات مختلفة، فإذا تغيرت قيمة μ فإن مكان المنحنى ينتقل الى اليمين اذا كانت $\mu_٢ > \mu_١$ والعكس صحيح ويمكن توضيح ذلك بالشكل التالى:



شكل رقم ٢ دالتى كثافة الاحتمال لتوزيعين طبيعيين يختلفان فى قيمة μ

وهذان المنحنيان لهما نفس الانحراف المعيارى وبالتالى فهما متطابقان من حيث الشكل أما اذا تغيرت σ فإن شكل المنحنى يتغير لأنها تتحكم فى تشتت التوزيع من حيث التفرطح أو التدبب وذلك كما فى الشكل التالى:



شكل رقم ٣ دوال كثافة الاحتمال لتوزيعات طبيعية تختلف فى قيمة σ

ويتضح من الشكل السابق أنه كلما زاد الانحراف المعيارى كلما كان المنحنى مفرطحاً (أى أكثر تشتتاً) وكلما نقص الانحراف المعيارى كلما كان المنحنى مدبباً(أى أكثر تركزاً).

وفى حالة أن يكون الانحراف المعيارى مساويا للصفر فإن هذا يعنى أن جميع القيم متساوية أى أننا نتعامل مع ثابت وبالتالى فلا يوجد توزيع إحتمالى.

٦- معامل الالتواء لهذا التوزيع يساوى صفر لأنه متماثل تماماً كما أن معامل التفرطح يساوى ٣.

٧- توجد نقطتا إنقلاب عند س = $\mu + \sigma$ ، س = $\mu - \sigma$

٨- اذا عوضنا فى دالة كثافة الاحتمال عن س بقيم مختلفة فإننا نحصل على إرتفاع العمود المقام عند هذه النقطة (الاحداثى الرأسى) ومن خصائص التوزيع الطبيعى أن العمود المقام عند س = $\pm\sigma$ ارتفاعه = ٦٠ر٦٥ ٪ من ارتفاع العمود المقام عند μ أى أن: إرتفاع العمود عند $\mu + \sigma$ = إرتفاع العمود عند $\mu - \sigma$ = ٦٠٦٥ر من

ارتفاع العمود عند μ ($\frac{٢٤١٩٧ر}{٣٩٨٩٤ر}$ = ٦٠٦٥ر)، وأيضاً العمود المقام عند

$\mu \pm ٢\sigma$ = $\frac{٠٥٣٩٩ر}{٣٩٨٩٤ر}$ =٥٣ر١٣٪ من إرتفاع العمود المقام عند الوسط الحسابى μ

اخيراً فإن إرتفاع العمود المقام عند $\mu \pm ٣\,\sigma$ = $\frac{٠٠٤٤٣ر}{٣٩٨٩٤ر}$ = ١١ر١٪ من ارتفاع العمود المقام عند μ

وهذا وتأخذ دالة التوزيع Distribution function أو الدالة التراكمية أو التجميعية Cumulative Function (وهى الدالة التى تعطى إحتمال أن المتغير العشوائى يساوى أو يقل عن قيمة معينة) الشكل التالى:

$$د\,(س) = \int_{-\infty}^{س} \frac{١}{\sqrt{٢ ط\, \sigma}} \times هـ^{-\left(\frac{س-\mu}{٢\sigma^{٢}}\right)^{٢}} \quad ، \quad -\infty < س < \infty$$

وهذه الدالة يصعب تكاملها بالطرق العادية لذلك فقد تم التفكير فى إعداد جداول لهذا التكامل إلا أنه إتضح وجود مشكلة تتمثل فى أننا نحتاج إلى عدد لا نهائى من الجداول نطراً لتغير قيمة التكامل ليس فقط بتغير قيمة س ولكن بتغير قيمتى μ , σ إلا أنه أمكن التغلب على هذه المشكلة من خلال ربط قيم المتغير س فى التوزيع الطبيعى العادى بقيم المتغير ى وهو متغير يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى متوسطه يساوى صفر وإنحرافه المعيارى يساوى واحد صحيح حيث يتم تحويل قيم المتغير س التى تتبع التوزيع الطبيعى العادى إلى ى التى تتبع التوزيع الطبيعى المعيارى من خلال العلاقة: $ى = \frac{س - \mu}{\sigma}$

وتفيد هذه العلاقة فى تحويل المتغيرات التى تتوزع توزيعاً طبيعياً وبغض النظر عن قيم معلمتيها (σ,μ) إلى متغير جديد يتوزع توزيعا طبيعياً معيارياً متوسطه يساوى صفر ، وإنحرافه يساوى واحد صحيح ولذلك فإن دالة كثافة الاحتمال لا يكون بها ثوابت مجهولة وأمكن حساب تكامل دالة كثافة الاحتمال للمتغير المعيارى ى والتى تأخذ الشكل التالى:

$$د\,(ى) = \frac{١}{\sqrt{٢ ط}} \times هـ^{-\frac{ى^{٢}}{٢}} \quad ، \quad -\alpha < ى < \alpha$$

وتم عمل جداول تعرف بجداول التوزيع الطبيعي المعياري والتي تستخدم في حساب الاحتمالات المختلفة (المساحة تحت المنحنى والتي عندها المتغير يساوي أو يقل عن قيمة معينة) وأيضا تستخدم في حساب إرتفاع العمود المقام عند نقطة معينة.

خصائص التوزيع الطبيعي المعياري:

هناك مجموعة من الخصائص للتوزيع الطبيعي المعياري من أهمها:

١- متوسط التوزيع يساوي صفر وانحرافه المعياري يساوي واحد صحيح.

٢- المساحة تحت المنحنى تساوي واحد صحيح لذلك تستخدم في حساب الاحتمالات.

٣- المنحنى متماثل حول الصفر والتوائه يساوي صفر وتفرطحه يساوي ٣

٤- إرتفاع العمود المقام عند أي نقطة (σ أو٢ σ أو ٣ σ أو أي قيم أخرى) تربطه بالعمود المقام عند الصفر نفس العلاقة السابق ذكرها بالنسبة للتوزيع الطبيعي.

٥- المساحة تحت المنحنى مقسمه الى قسمين حول المتوسط تقسيما متماثلا كما في التوزيع الطبيعي بحيث أن:

المساحة تحت المنحنى والمحصورة بين س = $\mu \pm \sigma$ تساوي ٦٨٫٢٧٪

المساحة تحت المنحنى والمحصورة بين س = $\mu \pm 2\sigma$ تساوي ٩٥٫٤٥٪

المساحة تحت المنحنى والمحصورة بين س = $\mu \pm 3\sigma$ تساوي ٩٩٫٧٣٪

وطالما أن التوزيع متماثل فإنه يمكن حساب الاحتمالات الخاصة بالقيم السالبة أي التي تقع على يسار الوسط الحسابي ولذلك فإن هناك جداول تحسب الاحتمالات من س > $-\infty$ وحتى س تساوي أي قيمة موجبة وهناك جداول أخرى تحسب الاحتمالات من س = صفر وحتى س تساوي أي قيمة موجبة استنادا الى فكرة التماثل وإلى أن المساحة تحت المنحنى من $-\infty$ < س $\geq$ صفر تساوي ٥٠٪ كما أن المساحة تحت المنحنى من صفر $\geq$ س < ∞ تساوي ٥٠٪ أيضا.

نظرية(١)

اذا كان لدينا المتغيرات المستقلة : $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، .... ، $س_{\sim}$ وكانت

تتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسطات : $\mu_١$ ، $\mu_٢$ ، $\mu_٣$ ، .... ، $\mu_{\sim}$ ولها

التباينات : $\sigma^٢_١$ ، $\sigma^٢_٢$ ، $\sigma^٢_٣$ ، ..... ، $\sigma^٢_{\sim}$

فأن المتغير العشوائى ص حيث $ص = س_١ + س_٢ + س_٣ + ... + س_{\sim}$

سوف يتوزع توزيعا طبيعيا أيضا بمتوسط يساوى $\mu \times \sim$ (أى مجموع المتوسطات) وتباين يساوى $\sigma^٢ \times \sim$ (أى مجموع التباينات). أى أن :

$$ى = \frac{ص - \sim \times \mu}{\sigma \sqrt{\sim}}$$ تتوزع توزيعا طبيعيا معياريا أيضا

نظرية النزعة المركزية: Central Limit Theorem

تعتبر هذه النظرية من النظريات الهامة فى الإحصاء حيث أننا فى النظرية السابقة علمنا أنه إذا كان لدينا المتغيرات المستقلة: $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ،.... ، $س_{\sim}$ والتى تتوزع توزيعا طبيعيا فإن المتغير العشوائي ص حيث: $ص = مجـ_{ر=١} س_ر$ يتوزع أيضا توزيعا طبيعيا بمتوسط يساوى مجموع متوسطات المتغيرات العشوائية ($\sim \times \mu$) وتباين يساوى مجموع التباينات ($\sigma^٢ \times \sim$) ولكن ما هو الحل اذا لم تكن المتغيرات تتوزع أصلا توزيعا طبيعيا ؟

فى هذه الحالة فإنه قد تم إثبات أن المتغير ص يتوزع أيضا توزيعاً طبيعياً وبغض النظر عن التوزيع الأصلى لقيم $س_ر$ ولكن فى حالة زيادة $\sim$ (حجم العينة) بدرجة كافية وتم الاتفاق على أن $\sim > ٣٠$ تعتبر كافية ، أى أن: $ى = \frac{ص - \sim \times \mu}{\sigma \sqrt{\sim}}$ تتوزع توزيعا طبيعيا معياريا وذلك فى حالة زيادة $\sim$ بدرجة كبيرة.

وهناك صيغة أخرى للنظرية اذا كان المتغير العشوائى هو متوسطات بمعنى أنه:

اذا كان لدينا المتغير العشوائى س والذى يتوزع أولا يتوزع توزيعا طبيعيا متصلا كان أو منفصلا متماثلا أو غير متماثلا ، متوسط μ وتباينة σ^2 اذا سحبنا عدة عينات من الحجم م وبغض النظر عن توزيع المجتمع الاصلى المحسوبة منه هذه العينات فإن متوسط هذه العينات يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط μ وتباين $\frac{\sigma^2}{\text{م}}$ أى أن:

$\text{ى} = \frac{\bar{\text{س}} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{\text{م}}}}$ تتوزع توزيعا طبيعيا معياريا وذلك اذا كان السحب بإرجاع و ايضا يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط μ وتباين $\frac{\sigma^2}{\text{م}} \times \frac{\text{ن} - \text{م}}{\text{م} - 1}$ أى أن:

$$\text{ى} = \frac{\text{س} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{\text{م}}} \times \sqrt{\frac{\text{ن} - \text{م}}{\text{م} - 1}}}$$ فى حالة عدم الارجاع

حيث ن حجم المجتمع، م حجم العينة، والمقدار $\sqrt{\frac{\text{ن} - \text{م}}{\text{م} - 1}}$ يسمى معامل التصحيح Correction factor وهو يستخدم اذا كان حجم العينة أكبر من ٥٪ من حجم المجتمع أما إذا كان حجم العينة فى حدود ٥٪ فلا فرق بين السحب بإرجاع والسحب بدون إرجاع والأمثلة التالية توضح كيفية الاستفادة من هذا التوزيع

مثال:

أ- أوجد المساحة المحصورة بين − α ، ٢ر٣ تحت المنحنى الطبيعى المعيارى .

ب- أوجد المساحة المحصورة بين صفر ، ٢ر٣ تحت المنحنى الطبيعى المعيارى .

جـ- أوجد المساحة المحصورة بين ٢ر٣ ، α تحت المنحنى الطبيعى المعيارى .

د- أوجد المساحة المحصورة بين − α، −٢ر٣ تحت المنحنى الطبيعى المعيارى .

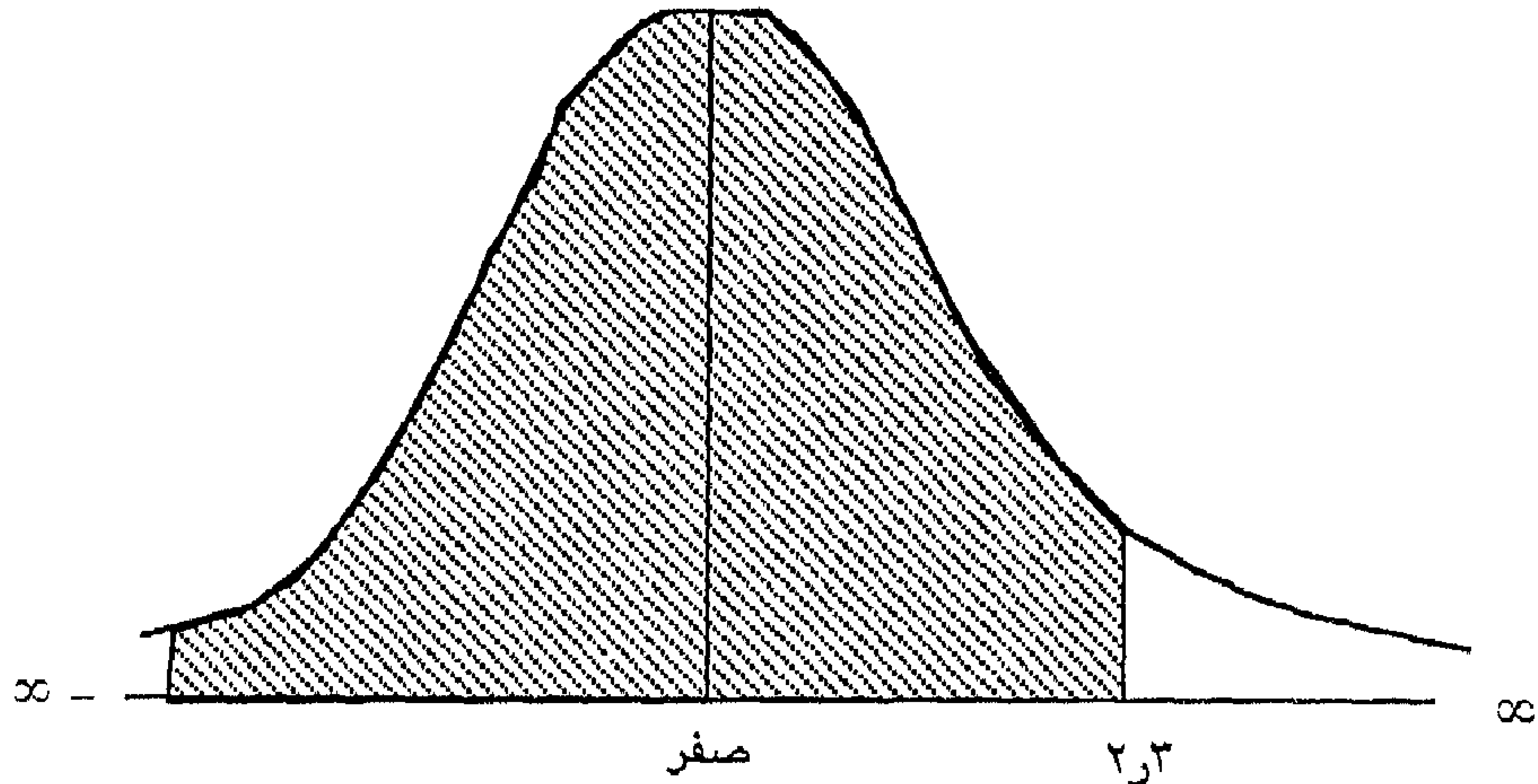
هـ- أوجد المساحة المحصورة بين ١ر٢ ، ٢ر٣ تحت المنحنى الطبيعى المعيارى .

و- أوجد المساحة المحصورة بين ٢ر٣ ، ١ر٢ تحت المنحنى الطبيعى المعيارى .

ز- أوجد المساحة المحصورة بين ٢ر٣ ، ١ر٢ تحت المنحنى الطبيعى المعيارى .

الحل:

أ- المساحة المحصورة بين - ∞ ، ٣ر٢ يمكن توضيحها كما يلى:

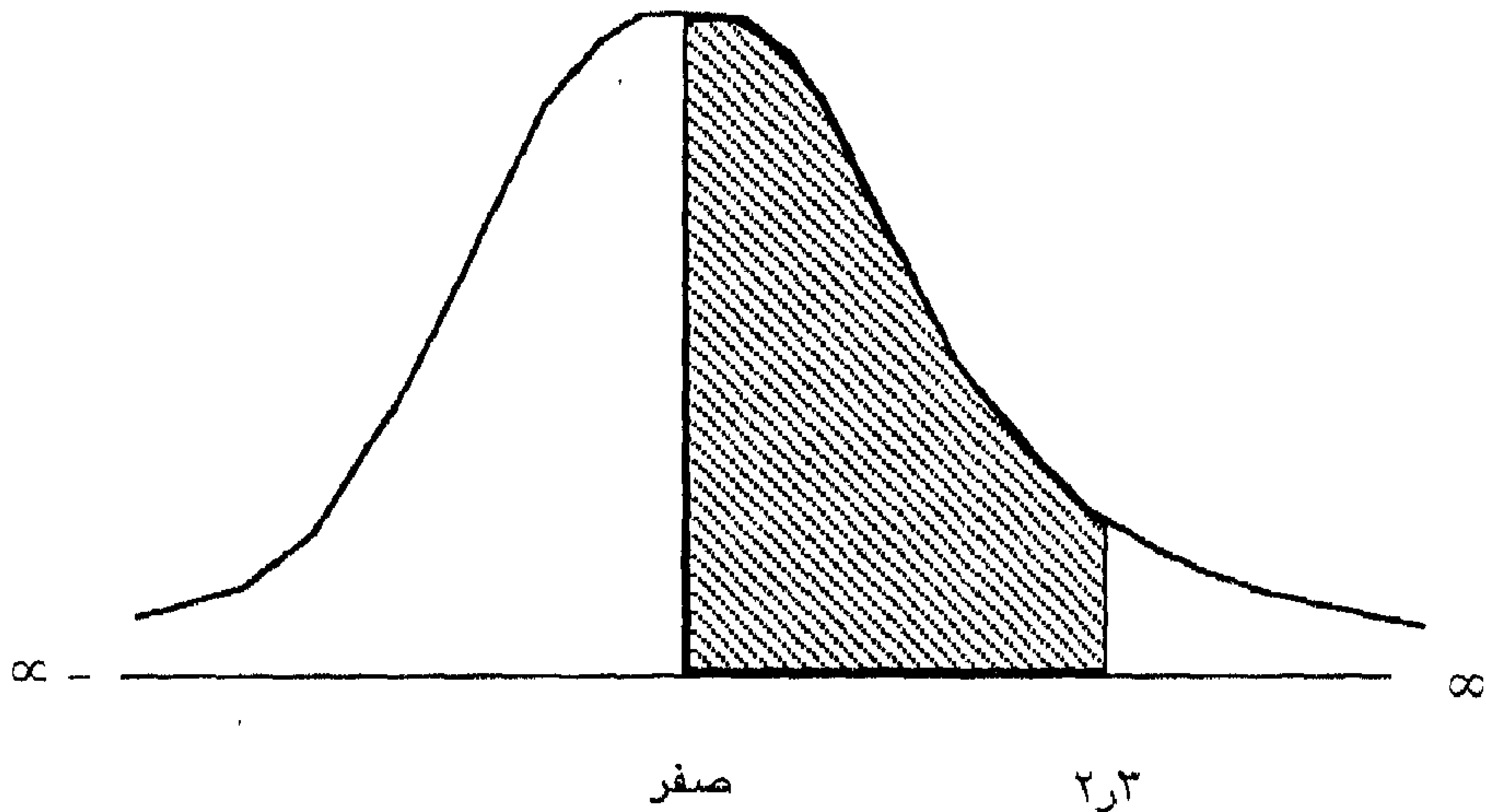


شكل رقم ٤

المساحة المطلوبة هى ح (- ∞ < ى < ٣ر٢) وهى = ح (ى < ٣ر٢)

= ٩٨٩٢٨ر

ب- المساحة المحصورة بين صفر ، ٣ر٢ يمكن توضيحها كما يلى:

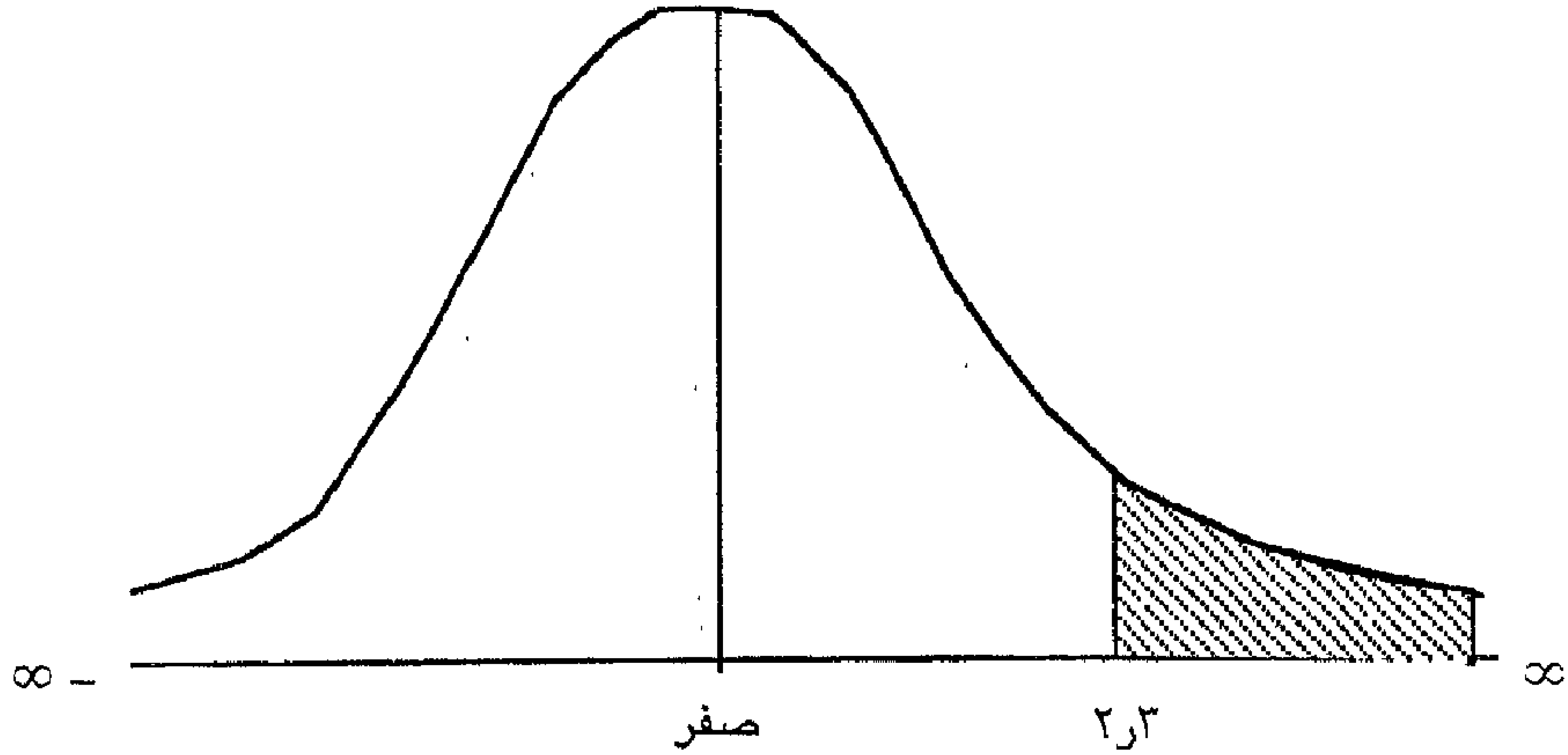


شكل رقم ٥

∴ المساحة المطلوبة هى ح (صفر< ى< ٣ر٢)= ح (ى < ٣ر٢) - ح (ى = صفر)

= ٩٨٩٢٨. – ٥. = ٤٨٩٢٨.

جـ - المساحة المحصورة بين ٣ر٢ , α يمكن توضيحها كما يلى:



شكل رقم ٦

وحيث أن المساحة المطلوبة هى ح(ى > ٣ر٢)

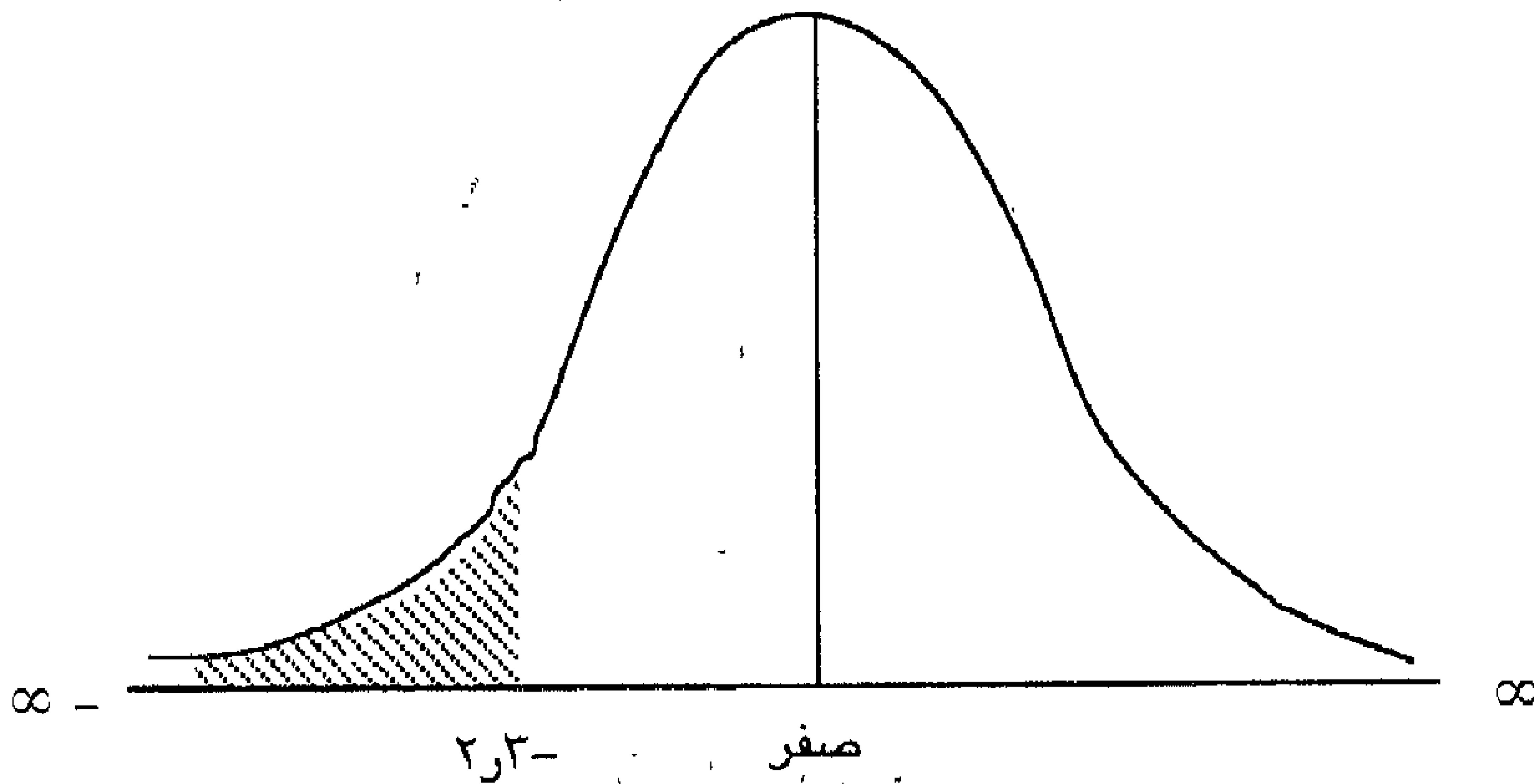
ولكن الجدول يعطى ح (ى < ٣ر٢) أى يعطى الجزء المكمل وبالتالى فإن:

ح (ى > ٣.٢) = ١- ح (ى < ٣ر٢)

= ١ – ٩٨٩٢٨ر

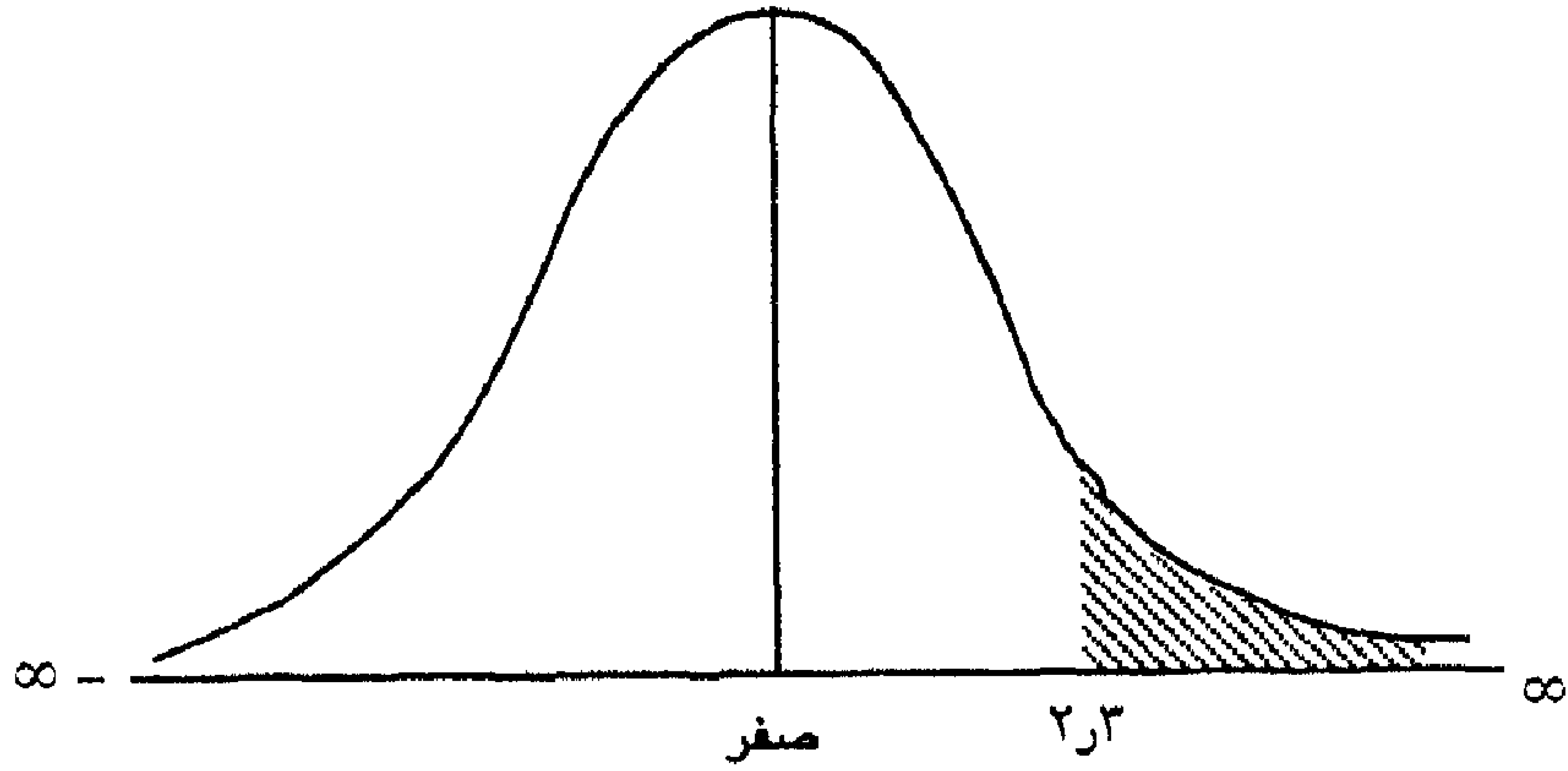
= ٠١٠٧٢ر

د- المساحة المحصورة بين -∞ ، -٣ر٢ يمكن توضيحها كما يلى:



شكل رقم ٧

وحيث أن المنحنى متماثل فإن هذه المساحة تساوى تماما المساحة الموجودة في الجانب الايمن والتى يمكن توضيحها بالشكل التالى:



شكل رقم ٨

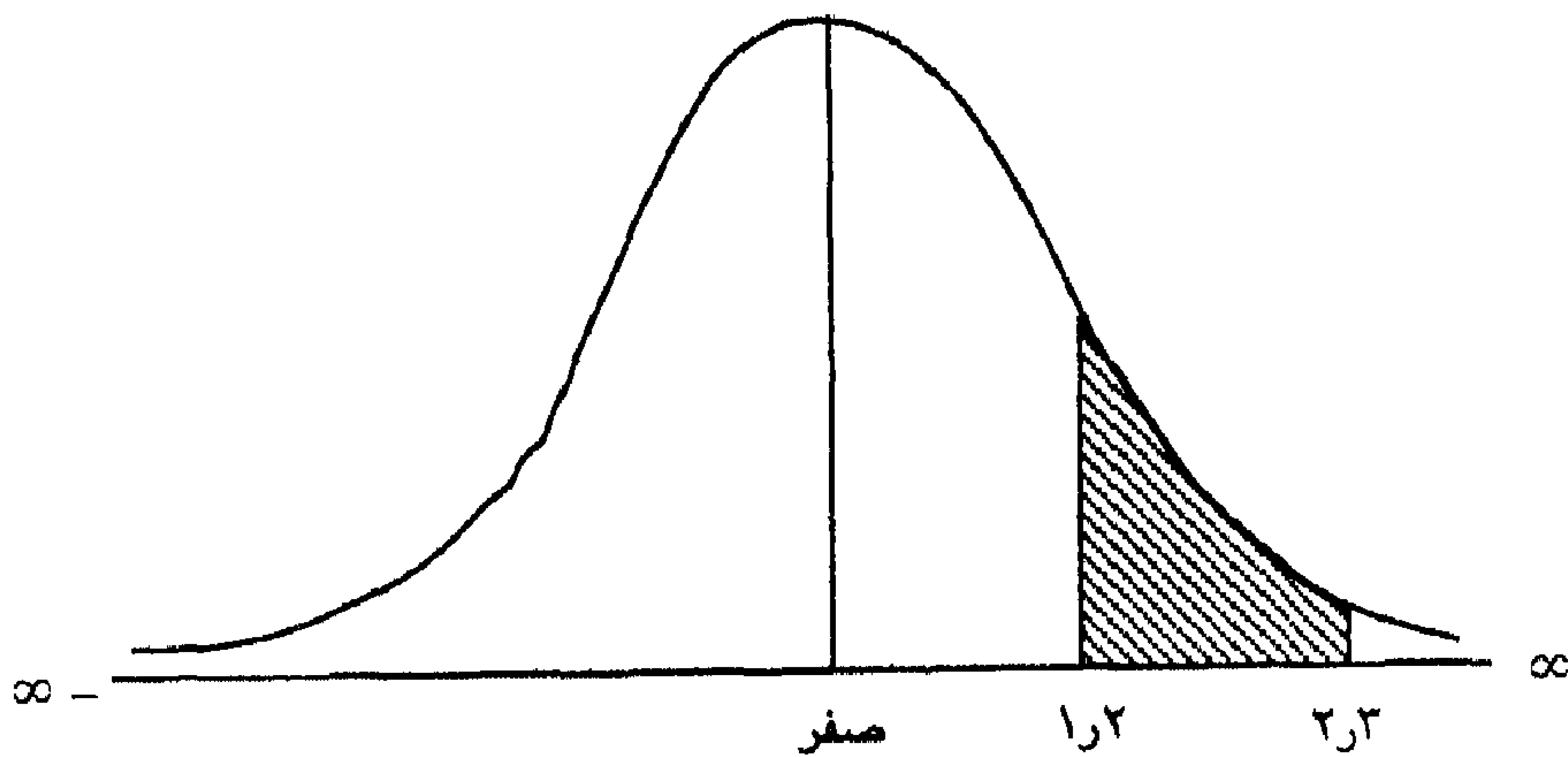
أى أن ح (ى < -٣ر٢) = ح (ى > ٣ر٢)

، ح (ى > ٣ر٢) = ١ - ح (ى < ٣ر٢)

= ١ - ٩٨٩٢٨ر

= ٠١٠٧٢ر

هـ - المساحة المحصورة بين ١،٢ ، ٢,٣ يمكن توضيحها بالشكل التالي:



شكل رقم ٩

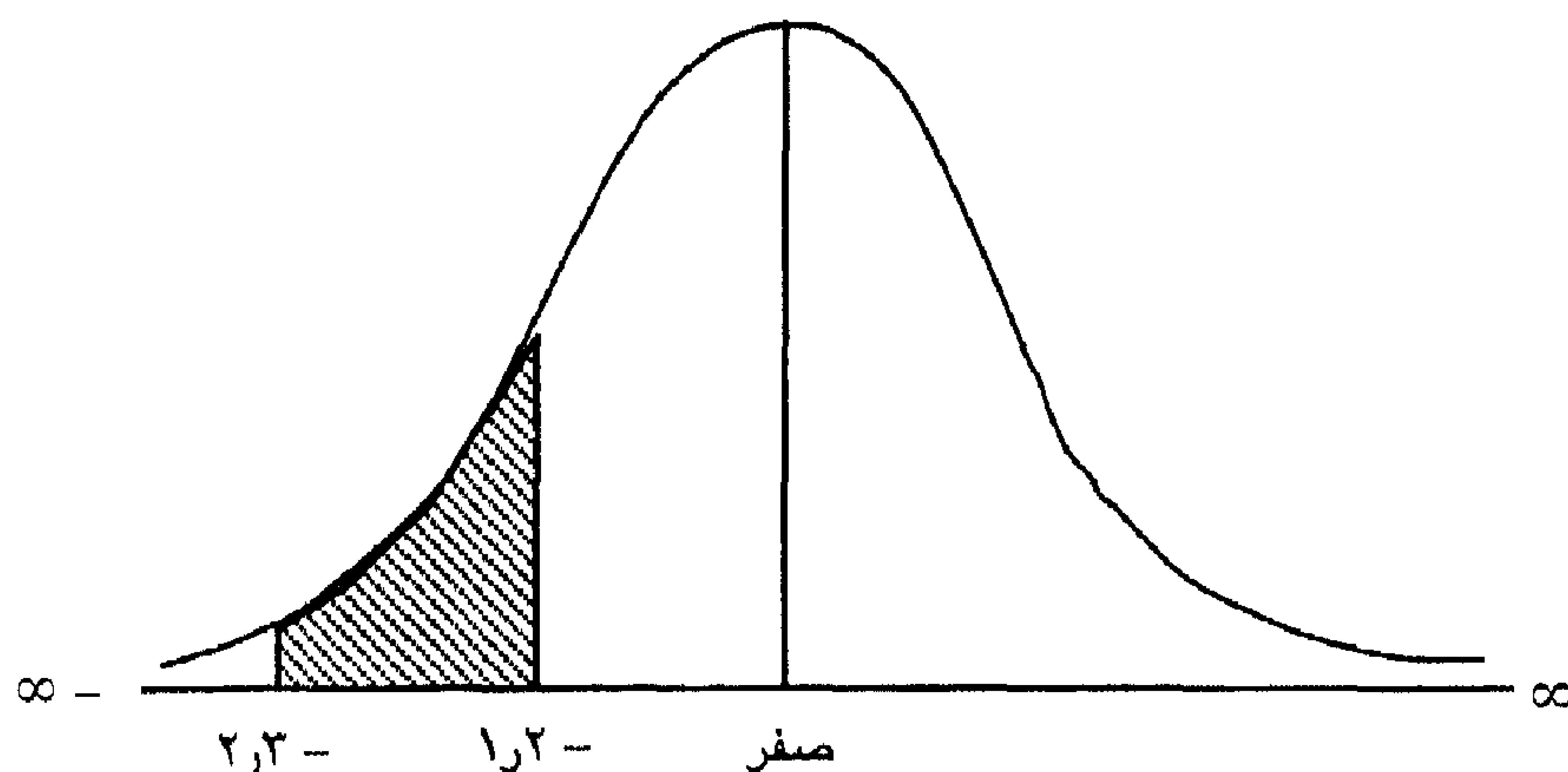
وهذه المساحة كما يتضح من الشكل السابق عبارة عن:

ح (١ر٢ < ى < ٣ر٢) = ح (ى < ٣ر٢) –ح (ى < ٢ ر١)

= ٩٨٩٢٨ر – ٨٨٤٩٣ر

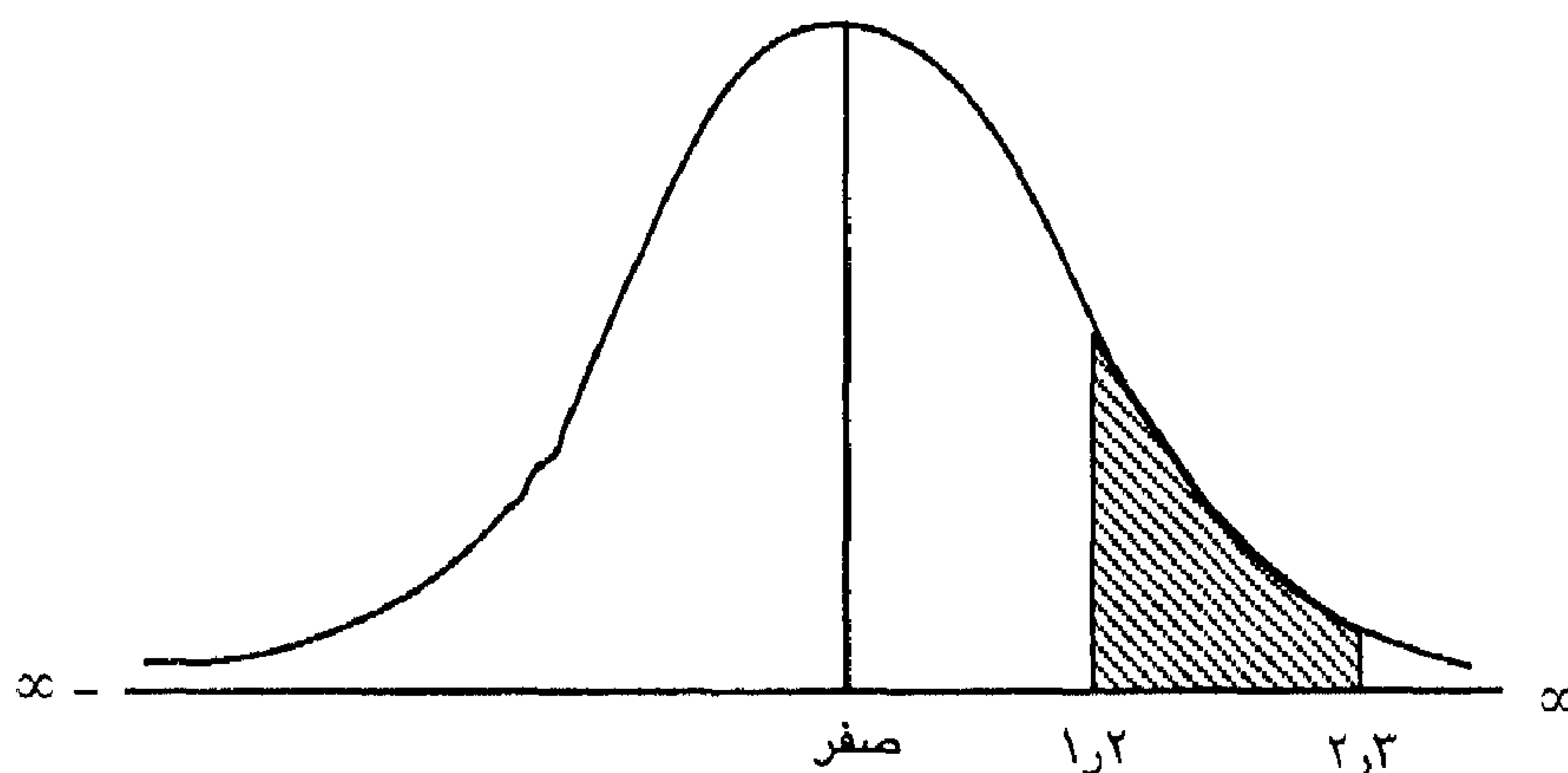
= ١٠٤٣٥ر

و – المساحة المحصورة بين – ٣ر٢ ، – ٢ر١ يمكن توضيحها بالشكل التالى:



شكل رقم ١٠

وهذه المساحة كما يتضح من الشكل السابق تناظر تماما المساحة الموجودة فى الطرف الأيمن والتى يمكن توضيحها بالشكل التالى:



شكل رقم ١١

وهذه المساحة كما يتضح من الشكل السابق عبارة عن :

ح (٢ر١ < ى < ٣ر٢) = ح (ى < ٣ر٢) − ح (ى < ٢ر١)

= ٩٨٩٢٨ر − ٨٨٤٩٣ر

= ١٠٤٣٥ر

مثال:

يتبع توزيع مبالغ وثائق التأمين فرع السيارات بأحدى شركات التأمين التوزيع الطبيعى بمتوسط قدرة ١٦٠٠٠ جنيها وتباين قدره ١٦٠٠٠٠٠٠ جنيها ، فاذا اخترنا عشوائيا وثيقة من هذا الفرع احسب:-

أ- احتمال أن يقل مبلغ الوثيقة عن ١٨٠٠٠ جنيها

ب- احتمال أن يزيد مبلغ الوثيقة عن ١٩٠٠٠ جنيها

جـ- إحتمال أن يتراوح مبلغ الوثيقة بين ١٥٠٠٠ ، ١٧٠٠٠ جنيها

د- إحتمال أن يتراوح مبلغ الوثيقة بين ١٧٠٠٠ ، ١٩٠٠٠ جنيها

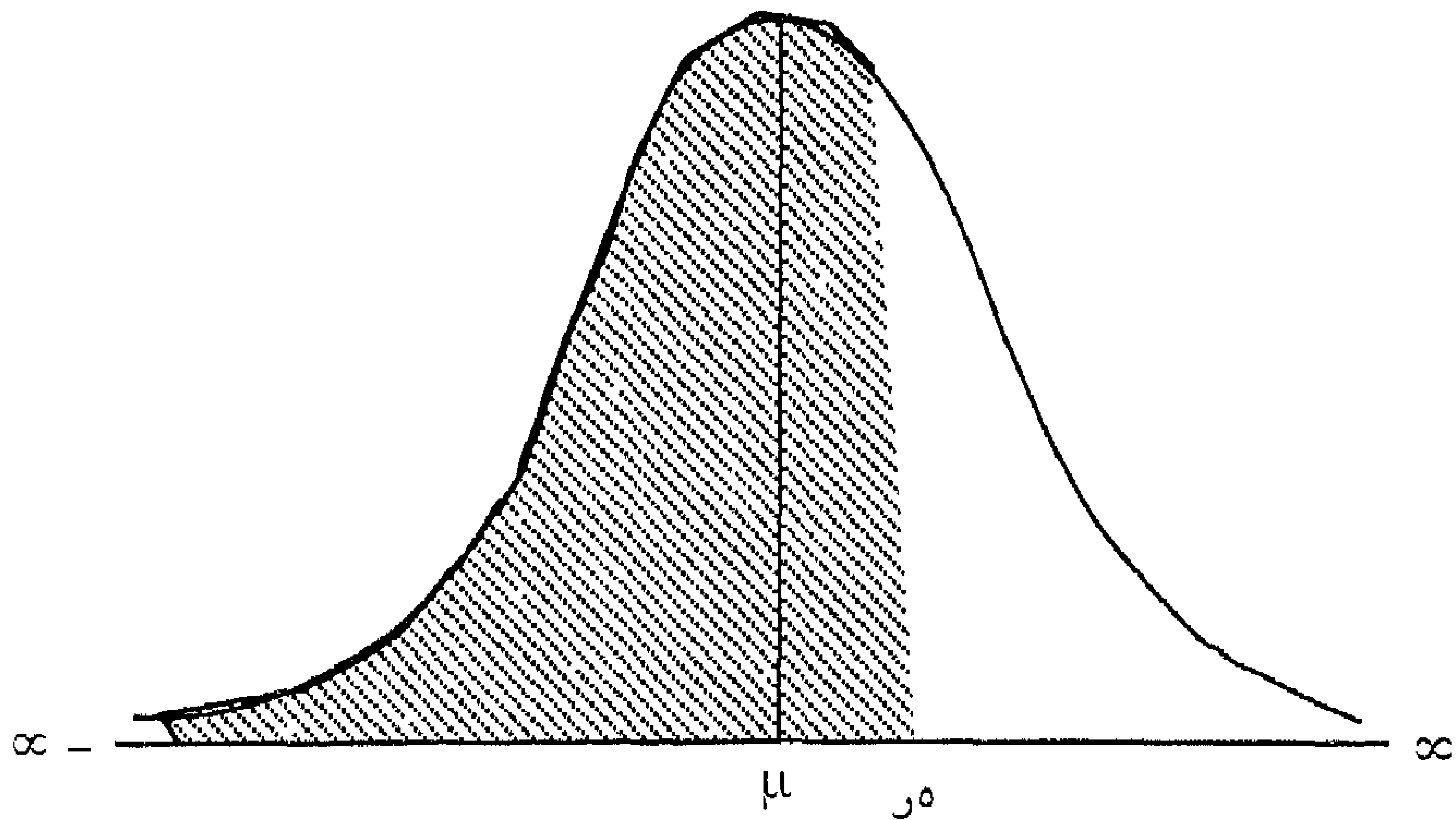
هـ- عدد الوثائق التى تزيد مبالغ تامينها عن ١٨٠٠٠ جنيها اذا علمت أن عدد الوثائق بهذا الفرع هو ١٠٠٠٠ وثيقة.

و- إحتمال أن يكون مجموع مبالغ ٧٥ وثيقة من هذه الوثائق فى حدود ١٢٥٠٠٠٠ جنيها.

الحل: أ- احتمال أن يقل مبلغ الوثيقة عن ١٨٠٠٠ جنيها.

$$\because \text{ى} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$$

$$= \frac{١٨٠٠٠ - ١٦٠٠٠}{٤٠٠٠} = ٥٠ر$$



شكل رقم ١٢

ومن جدول التوزيع الطبيعى المعيارى نجد أن:

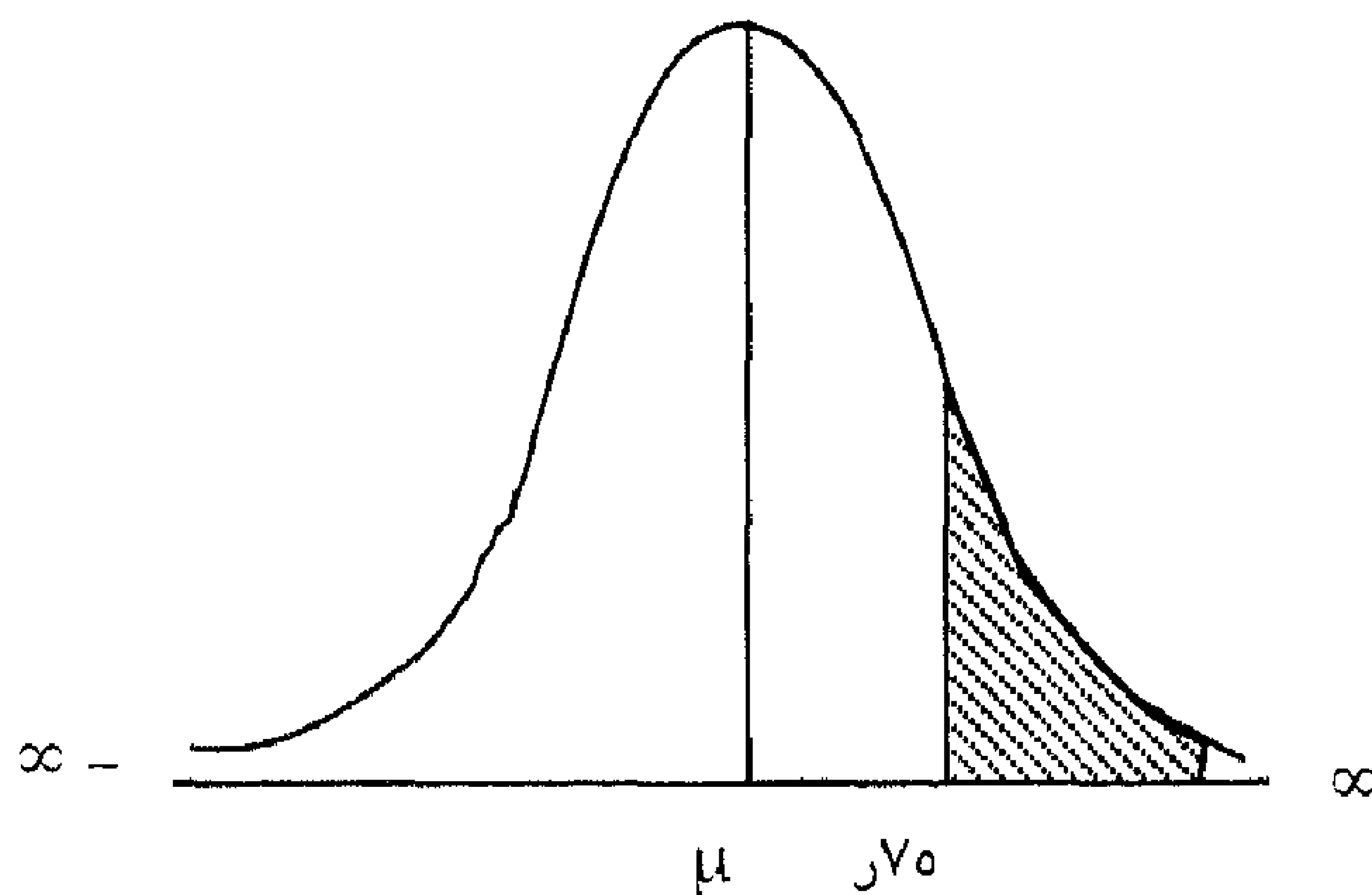
ح (ى ‹ ٥ر) = ٦٩١٤٦ر

ب- احتمال أن يزيد مبلغ الوثيقة عن ١٩٠٠٠ جنيها:

ى = (١٩٠٠٠ − ١٦٠٠٠) / ٤٠٠٠ = ٧٥ر

∴ ح (ى › ٧٥ر) = ١ − ح (ى ‹ ٧٥ر)

= ١ − ٧٧٣٣٧ر = ٢٢٦٦٣ر



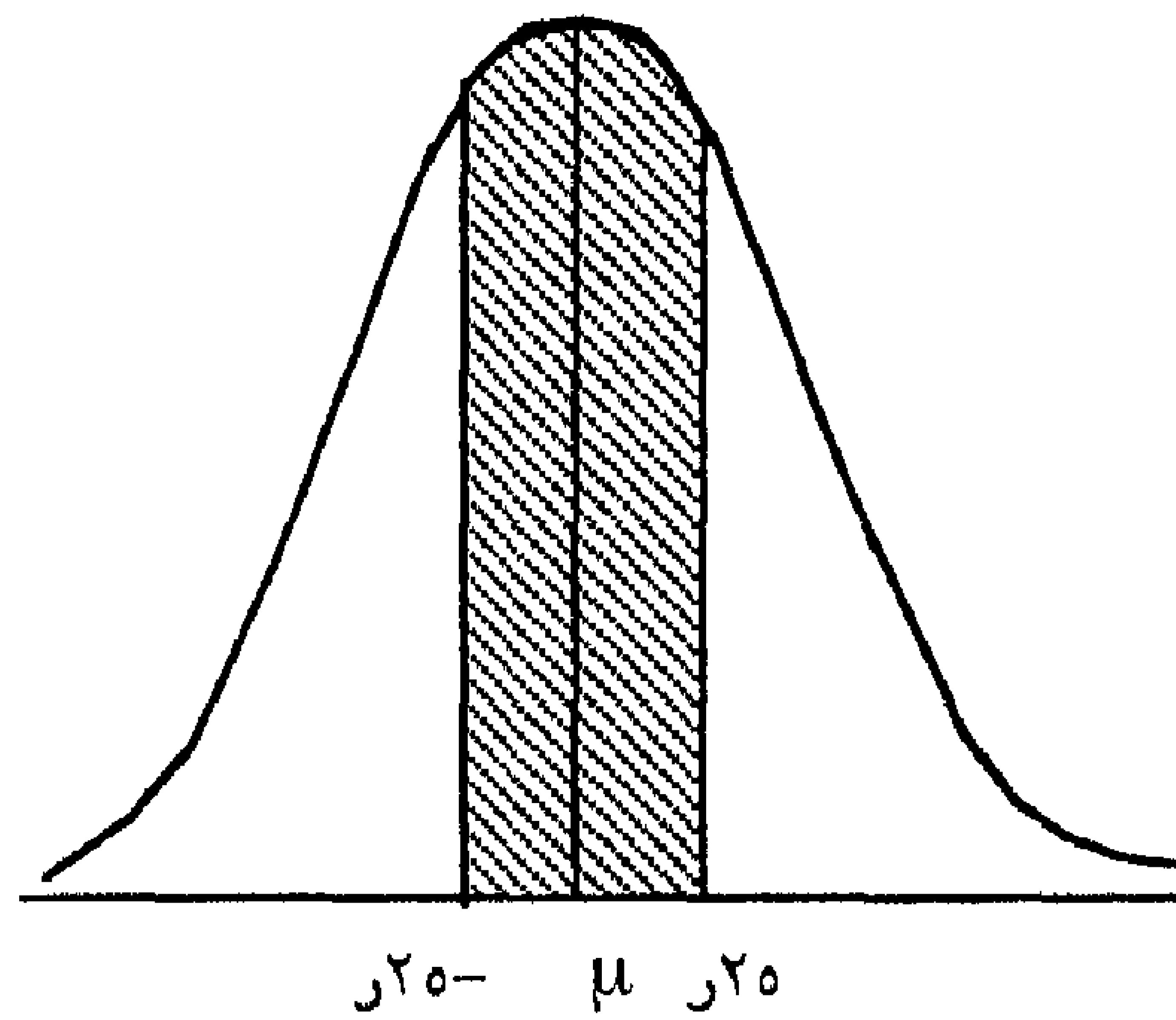
شكل رقم ١٣

حـ - احتمال أن يتراوح مبلغ الوثيقة بين ١٥٠٠٠ ، ١٧٠٠٠ جنيها

∵ ى = (س − μ) / σ

ى١ = (١٥٠٠٠ − ١٦٠٠٠) / ٤٠٠٠ = −٢٥ر

ى٢ = (١٧٠٠٠ − ١٦٠٠٠) / ٤٠٠٠ = ٢٥ر



شكل رقم ١٤

ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن هذه المساحة عبارة عن:−

ح (−٢٥ر < ى < ٢٥ر) = ح (ى < ٢٥ر) − ح (ى < −٢٥ر)

، ∴ ح (ى < ٢٥ر) = ٥٩٨٧٧ر

ح (ى < −٢٥ر) = ح (ى > ٢٥ر)

، ح (ى > ٢٥ر) = ١−ح (ى < ٢٥ر)

= ١− ٥٩٨٧٧ر

= ٤٠١٢٣ر

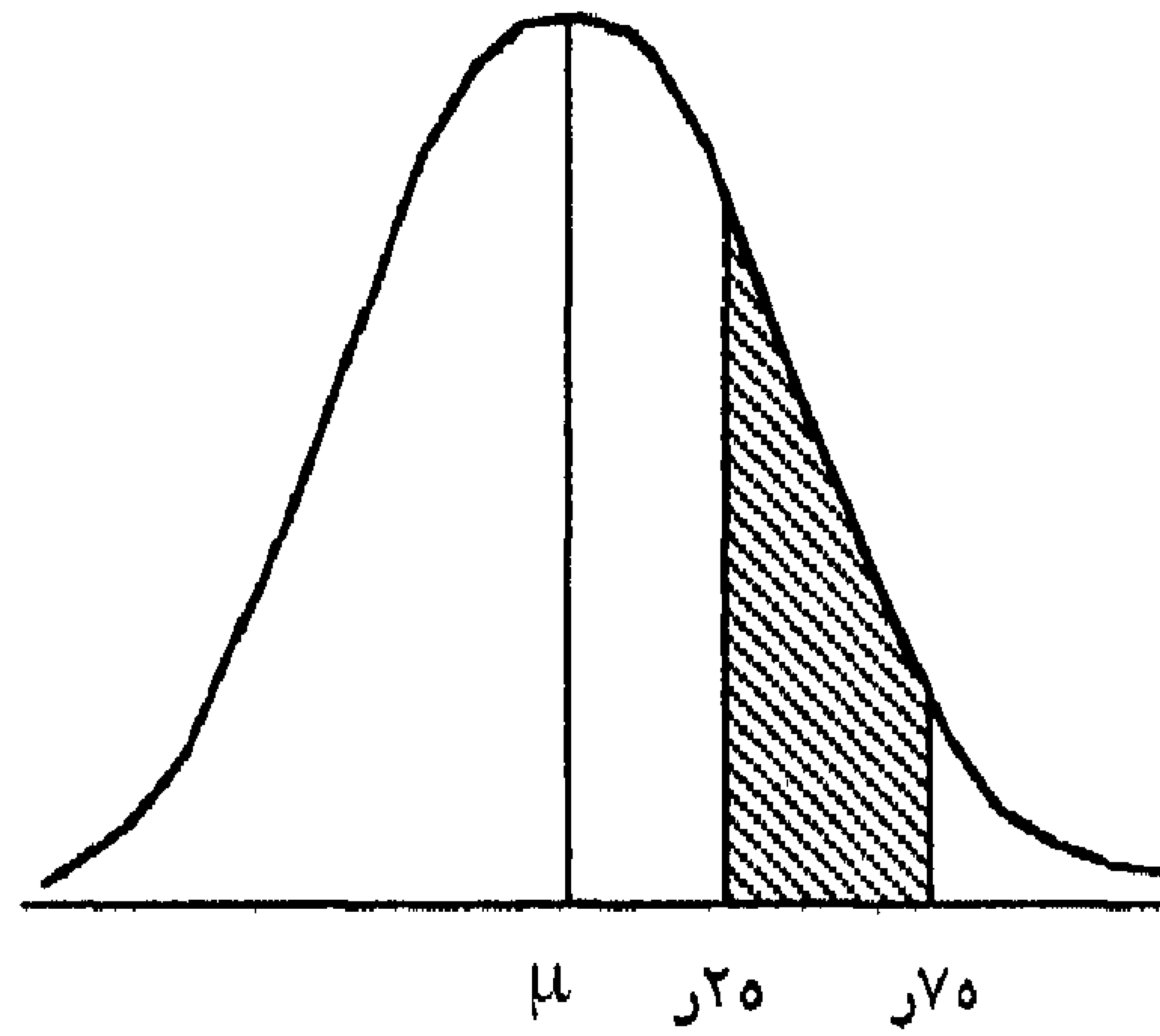
∴ ح(− ٢٥ر < ى < ٢٥ر) = ٥٩٨٧٧ر − ٤٠١٢٣ر

= ١٩٧٥٤ر

د- إحتمال أن يتراوح مبلغ الوثيقة بين ١٧٠٠٠ ، ١٩٠٠٠ جنيها:

ى١ = (١٧٠٠٠ − ١٦٠٠٠) / (٤٠٠٠) = ٢٥ر

ى٢ = (١٩٠٠٠ − ١٦٠٠٠) / (٤٠٠٠) = ٧٥ر



شكل رقم ١٥

والمساحة المطلوبة عبارة عن:

ح (٢٥ر < ى < ٧٥ر) = ح (ى < ٧٥ر) − ح (ى < ٢٥ر)

= ٧٧٣٣٧ر − ٥٩٨٧٧ر

= ١٧٤٦٠ر

هـ- عدد الوثائق التى تزيد مبالغ تأمينها عن ١٨٠٠٠ جنيها:

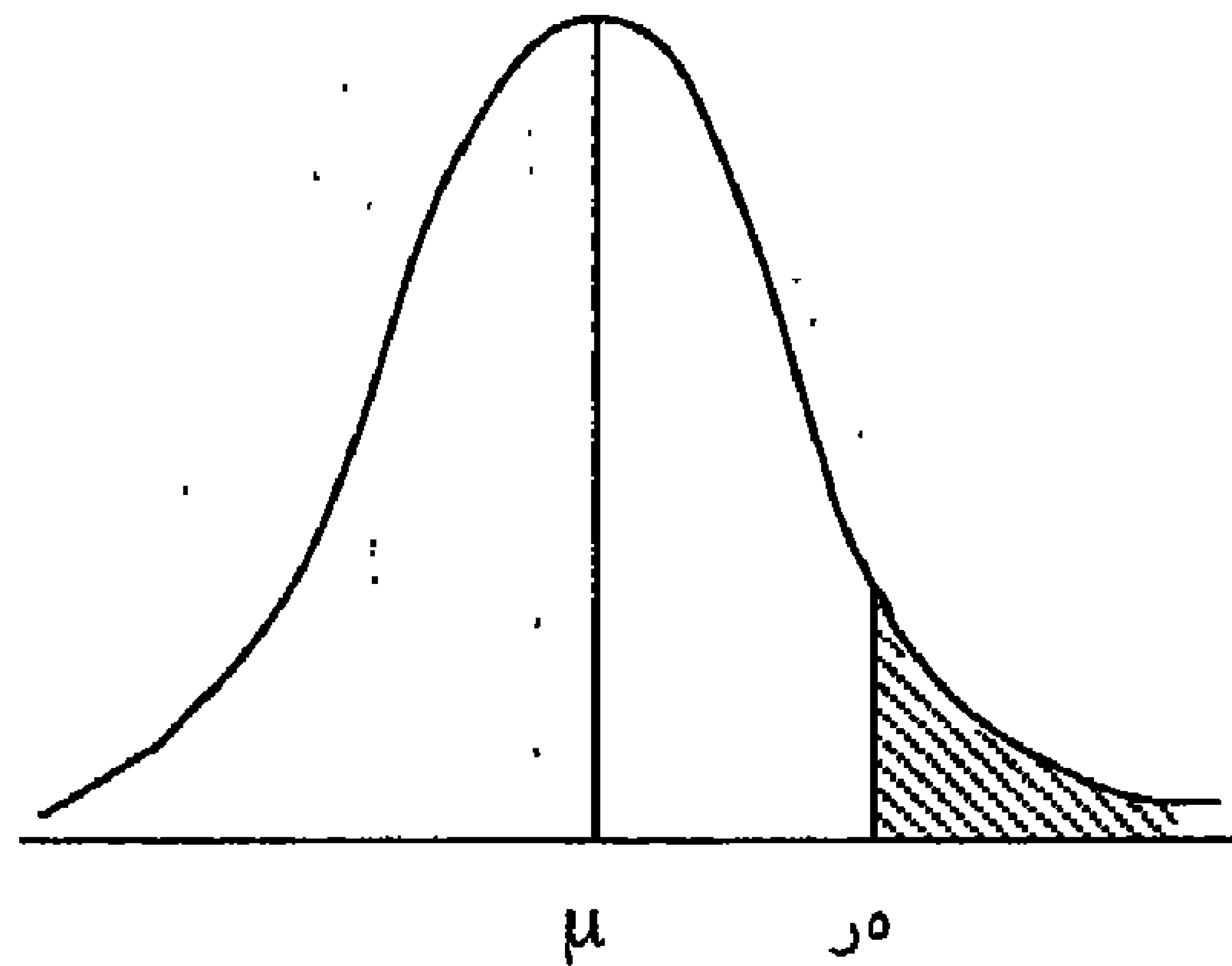
يتم أولاً حساب إحتمال أن يزيد مبلغ الوثيقة عن ١٨٠٠٠ جنيها كما يلي:-

$$ى = \frac{١٨٠٠٠ - ١٦٠٠٠}{٤٠٠٠} = ٥ر$$

$$ح\ (ى > ٥ر) = ١ - ح\ (ى < ٥ر)$$

$$= ١ - ٦٩١٤٦ر$$

$$= ٣٠٨٥٤ر$$



شكل رقم ١٦

∴ من بين ١٠٠٠٠٠ وثيقة يوجد ٨٥٤ر٣٠٪ من عدد الوثائق يزيد قيمته عن ١٨٠٠٠

∴ عدد الوثائق التى تزيد قيمتها عن ١٨٠٠٠ = ١٠٠٠٠٠× ٣٠٨٥٤ر = ٣٠٨٥٤ وثيقة

و - لحساب احتمال أن مجموع مبالغ ٧٥ وثيقة من هذه الوثائق يكون فى حدود ١٢٥٠٠٠٠ جنيهاً فإننا إزاء متغير عشوائى جديد (مجموع مبالغ الوثائق وليس مبلغ الوثيقة الواحدة) وطبقا لنظرية النزعة المركزية فإنه اذا كان لدينا مجموع متغيرات عشوائية مستقلة تتوزع توزيعا طبيعيا (أو تتوزع أى توزيع آخر ولكن قيمة $\sim$ كبيرة) فإن المتغير العشوائى الجديد وهو مجموع مبالغ الوثائق يتوزع أيضا توزيعا طبيعيا ولكن بمتوسط = $\sim \times \mu$ = ٧٥ × ١٦٠٠٠ = ١٢٠٠٠٠٠

و بتباين = ن × σ^{2} = ٧٥ × ١٦٠٠٠٠٠٠ = ١٢٠٠٠٠٠٠٠٠

∴ احتمال أن مجموع مبالغ ٧٥ وثيقة من هذه الوثائق يكون فى حدود ١٢٥٠٠٠٠ جنيها يساوى:

ى = (١٢٥٠٠٠٠ − ١٢٠٠٠٠٠) / √١٢٠٠٠٠٠٠٠٠ = ٥٠٠٠٠ / ٣٤٦٤١ = ١ر٤٤ (أى ح (ى < ١ر٤٤))

وبالبحث فى الجدول نجد أن هذه القيمة تناظر إحتمالا قدره: ٩٢٥٠٧ر

أسئلة على الوحدة الدراسية الثامنة

١- اذا علمت أن توزيع الوثائق حسب مبالغ التأمين تتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط ٥٠٠٠٠ جنيها وتباين ٤٠٠٠٠٠٠٠ جنيها، فإذا اخترنا إحدى الوثائق عشوائيا فاحسب:

أ - إحتمال أن يقل مبلغ تأمينها عن ٨٠٠٠٠ جنيها

ب- إحتمال أن يزيد مبلغ تأمينها عن ٩٥٠٠٠ جنيها

جـ- إحتمال أن يتراوح مبلغ تأمينها بين ٧٥٠٠٠ ، ١٠٥٠٠٠ جنيها

د- عدد الوثائق التى تزيد مبالغ تأمينها عن ١١٠٠٠٠ جنيها اذا كان عدد الوثائق الاجمالى فى الشركة هو ٢٠٠٠٠٠ وثيقة

هـ- أن يكون مجموع مبالغ التأمين التى اشتراها ١٢٠ مؤمن عليه فى حدود ١٣٠٠٠٠٠٠ جنيها.

الوحدة الدراسية التاسعة

التوزيع الطبيعى كتقريب لبعض التوزيعات المنفصلة

الوحدة الدراسية التاسعة

موضوعها: التوزيع الطبيعى كتقريب لبعض التوزيعات المنفصلة

هدفها : تعريف الطالب بكيفية إستخدام التوزيع الطبيعى فى حساب الاحتمالات المختلفة التى تتعلق بالتوزيعات المنفصلة الممثلة لعدد الحوادث.

عناصرها: التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ذى الحدين.

التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع بواسون.

التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ذى الحدين السالب.

التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذى الحدين:

سبق أن أوضحنا عند دراستنا لتوزيع ذى الحدين أن دالة كثافة الاحتمال تأخذ الشكل التالى:

$$\text{د}(\text{س}) = \binom{\text{ن}}{\text{س}} \text{ل}^{\text{س}} \times (1-\text{ل})^{\text{ن}-\text{س}}$$

ولكن حساب الاحتمالات المختلفة وفقا لهذه المعادلة تكون عملية شاقة وتحتاج لمجهود كبير خاصة عندما تكون قيمة ن كبيرة ومثال ذلك:

$$\text{د}(٤٠٠) = \binom{١٠٠٠}{٤٠٠} (٠ر٧)^{٤٠٠} \times (٠ر٣)^{٦٠٠}$$

ولهذا إتجه التفكير إلى استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب جيد لحساب قيم الاحتمالات المختلفة لتوزيع ذى الحدين عندما تكون قيمة ن كبيرة.

ولكن يؤخذ فى الاعتبار أن استخدام التوزيع الطبيعى لحساب قيم الاحتمالات الخاصة بتوزيع ذى الحدين يتطلب توافر شروط معينة يمكن التعبير عنها من خلال النظرية التالية:

" اذا كانت قيمة احتمال تحقق حادث ما هى ل غير قريبة من الصفر أو من الواحد الصحيح فإن توزيع ذى الحدين يقترب من التوزيع الطبيعي بمتوسط ن ل وانحراف معيارى $\sqrt{\text{ن ل ك}}$ وذلك كلما إقتربت ن من مالا نهاية "

وهذا يعني أنه اذا كان لدينا المتغير العشوائى س الذى يتبع توزيع ذى الحدين وكانت ل بعيدة عن الصفر والواحد الصحيح (أى قريبة من $\frac{1}{2}$) فإن المتغير ى حيث:

$\text{ى} = \frac{\text{س} - \text{ن ل}}{\sqrt{\text{ن ل ك}}}$ يتوزع توزيعا طبيعيا معياريا بمتوسط صفر ، انحراف معيارى واحد صحيح كلما اقتربت ن من مالانهاية.

ونظرا لأن توزيع ذى الحدين هو توزيع منفصل وأن التوزيع الطبيعى هو توزيع متصل لذلك فإننا نفترض بالنسبة للتوزيع المنفصل أن النقطة الموجود عندها الاحتمال موجودة فى

مركز الفئة وأن طول الفئة واحد صحيح أى أن الاحتمال يمثله مستطيل قاعدته واحد صحيح وإرتفاعه يساوى الاحتمال المناظر لمركز الفئة ، فإذا كان هناك إحتمال عند النقطة ٤ فإنه يتم رسم مستطيل قاعدته واحد سنتيمتر ويبدأ من ٥ر٣ حتى ٥ر٤ وبالتالى يمكن القول بأن

المتغير ى حيث : $\text{ى} = \dfrac{(\text{س} \pm \frac{١}{٢}) - \text{ن ل}}{\sqrt{\text{ن ل ك}}}$

يتوزع توزيعا طبيعيا معياريا والأمثلة التالية توضح كيفية الاستفادة من التوزيع الطبيعى عند حساب الاحتمالات الخاصة بتوزيع ذى الحدين:

مثال (١) :

اذا كان احتمال أن تكون الوحدة المنتجة جيدة هو ٨ر, فإذا سحبنا عينة مكونة من ١٥ وحدة فاحسب احتمال أن يوجد بينها ١٠ وحدات جيدة

الحل: أولاً باستخدام توزيع ذى الحدين:

$$\text{د}(\text{س}) = \binom{\text{ن}}{\text{س}} \text{ل}^{\text{س}} (١-\text{ل})^{\text{ن}-\text{س}}$$

$$\text{د}(١٠) = \binom{١٥}{١٠} \text{ر}٨^{١٠} \times \text{ر}٢^{٥}$$

$$\text{د}(١٠) = \frac{١٥!}{١٠! \times ٥!} \times \text{ر}١٠٧٣٧٤١٨٢ \times \text{ر}٠٠٠٣٢$$

$$= \frac{١٥\times١٤\times١٣\times١٢\times١١}{١\times٢\times٣\times٤\times٥} \times \text{ر}٠٠٠٣٤٣٥٩٧ = \text{ر}١٠٣١٨٢$$

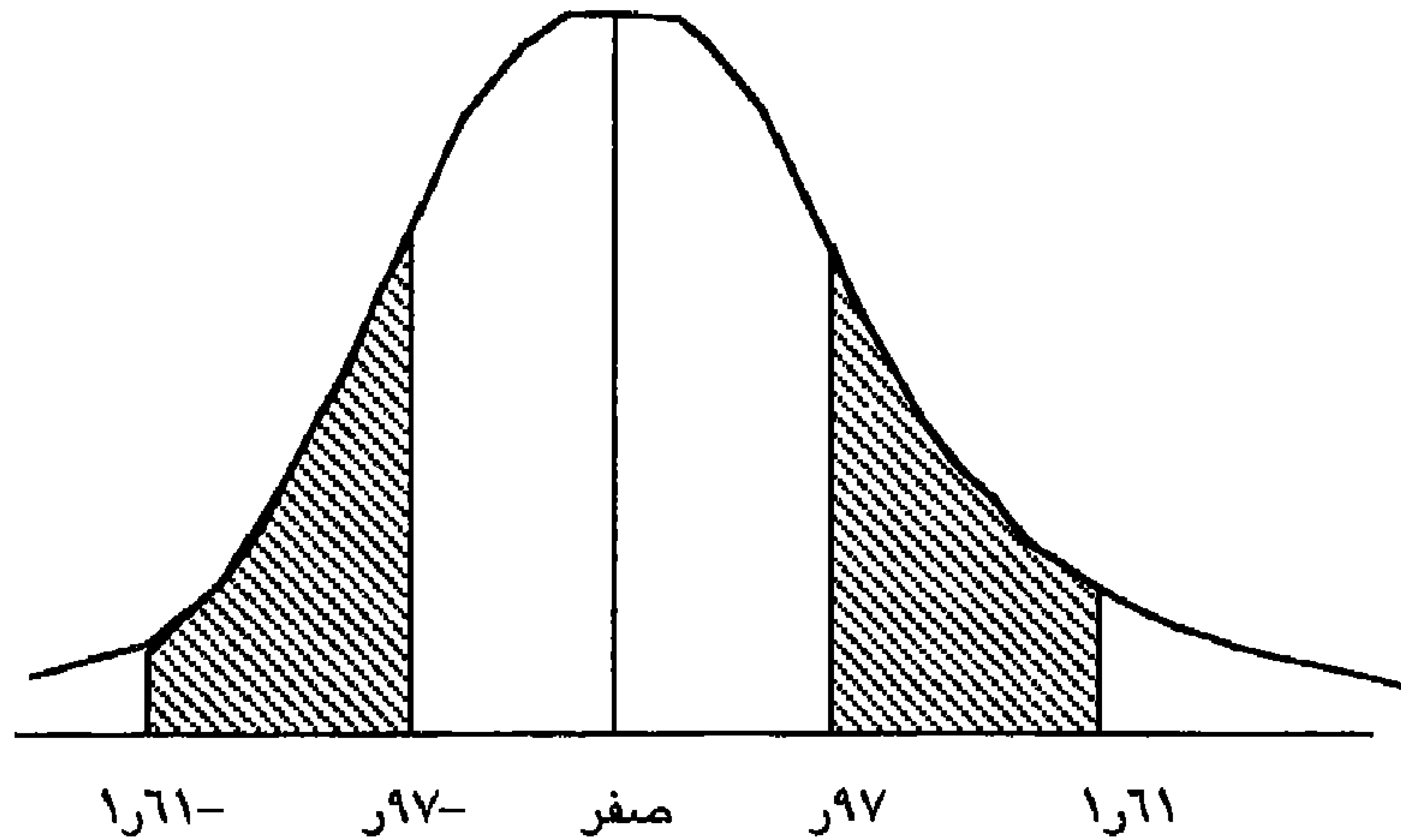
ثانيا : باستخدام التوزيع الطبيعى:

$$\text{ى}_١ = \frac{(\text{س} - \frac{١}{٢}) - \text{ن ل}}{\sqrt{\text{ن ل ك}}}$$

$$= \frac{(١٠ - \frac{١}{٢}) - ١٥ \times \text{ر}٨}{\sqrt{١٥ \times \text{ر}٨ \times \text{ر}٢}}$$

$$ى_1 = \frac{٩ر٥ - ١٢}{\sqrt{٢ر٤}} = - ١ر٦١$$

$$ى_2 = \frac{١٠ر٥ - ١٢}{\sqrt{٢ر٤}} = - ر٩٧$$



وبالكشف فى جدول التوزيع الطبيعى المعيارى نحصل على الاحتمالات التالية:

$≤ (ى_1) = ر٩٤٦٣٠$

$≤ (ى_2) = ر٨٣٣٩٨$

∴ الاحتمال المطلوب = ر٩٤٦٣٠ − ر٨٣٣٩٨ = ر١١٢٣٢

وهذه النتيجة قريبة جدا من النتيجة السابق الحصول عليها باستخدام توزيع ذى الحدين وهى ر١٠٣١٨٢

والفرق بينهما = ر١١٢٣٢٠ − ر١٠٣١٨٢ = ر٠٠٩١٣٨

مثال(٢):

اذا كان احتمال أن تكون الوحدة المنتجة جيدة هو ر٦ فاذا سحبنا عينة مكونة من ١٥ وحدة فاحسب احتمال أن يكون من بينها ١٠ وحدات جيدة.

الحل:

أولا: باستخدام توزيع ذى الحدين:

$$\therefore\ ك(س) = \binom{ن}{س} ل^{س} (١-ل)^{ن-س}$$

$$ك(١٠) = \binom{١٥}{١٠} (ر٦)^{١٠} (ر٤)^{٥}$$

$$= \frac{١٥!}{١٠! \times ٥!} \times (ر٦)^{١٠} (ر٤)^{٥}$$

$$= ر١٨٥٩٣٨٠$$

ثانيا: باستخدام التوزيع الطبيعى:

$$\therefore\ ى_١ = \frac{(س - \frac{١}{٢}) - ن ل}{\sqrt{ن ل ك}}$$

$$ى_١ = \frac{(١٠ - \frac{١}{٢}) - ١٥ \times ر٦}{\sqrt{١٥ \times ر٦ \times ر٤}}$$

$$= \frac{٩ر٥ - ٩}{\sqrt{٣ر٦}}$$

$$= \frac{ر٥}{١ر٨٩٧٣٦٦٥} = ر٢٦$$

$$ى_٢ = \frac{١٠ر٥ - ٩}{١ر٨٩٧٣٦٦٥} = ر٧٩٠$$

وبالكشف فى جدول التوزيع الطبيعى المعيارى نحصل على الاحتمالات التالية:

$$ك(ى_١) = ر٦٠٢٥٧$$

$$ك(ى_٢) = ر٧٨٥٢٤$$

∴ الاحتمال المطلوب $= ر٧٨٥٢٤ - ر٦٠٢٥٧ = ر١٨٢٦٧٠$

وهذه النتيجة قريبة جدا من النتيجة السابق الحصول عليها باستخدام توزيع ذى الحدين وهى ٠٫١٨٥٩٣٨

والفرق بينهما = ٠٫١٨٥٩٣٨ – ٠٫١٨٢٦٧ = ٠٫٠٠٣٢٦٨

ونلاحظ أن الفرق قد انخفض عن المثال السابق نظرا لاقتراب احتمال النجاح من $\frac{١}{٢}$ وايضا كلما زاد عدد مرات التجربة كلما اقترب الفرق بين الاحتمال المحسوب باستخدام ذى الحدين والاحتمال المحسوب باستخدام التوزيع الطبيعى من الصفر .

التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع بواسون:

عند دراستنا لتوزيع بواسون علمنا أنه لحساب احتمال أن يقع المتغير س بين قيمتين وليكن $س_١$ ، $س_م$ فإننا نحصل على ذلك الاحتمال بجمع الاحتمالات ابتداء من إحتمال الحصول على $س_١$ وحتى إحتمال الحصول على $س_م$ وهذه العملية قد تكون غير مناسبة فى التطبيق وخاصة عندما تكون قيمة المتوسط (μ) كبيرة ولكن هناك خاصية هامة لتوزيع بواسون تنص على أن مجموع متغيرات عشوائية مستقلة تتوزع كل منها بواسون هو أيضا يتوزع بواسون بمتوسط يساوى مجموع متوسطات المتغيرات العشوائية المستقلة (أى أنه اذا كان لدينا متغير عشوائى يتوزع بواسون بمتوسط ٨ فإنه يمكن النظر اليه على أنه يمثل مجموع ٨ متغيرات عشوائية تتوزع بواسون بمتوسط واحد لكل منها أو أنه يمثل مجموع ١٦ متغير عشوائى يتوزع بواسون بمتوسط $\frac{١}{٢}$ لكل منها وهكذا...)

وعلى ذلك فإنه يمكن القول طبقا لنظرية النزعة المركزية أن المتغير ى = $\frac{س - \mu}{\sqrt{\mu}}$ يتوزع توزيعا طبيعيا معياريا حيث μ هى متوسط توزيع بواسون $\sqrt{\mu}$ هى الانحراف المعيارى والأمثلة التالية توضح كيفية الاستفادة من هذا التقريب.

مثال (٣) :

فيما يلى بيان عن نتائج فرع السيارات خلال عام ١٩٩٠ بإحدى شركات التأمين المصرية موزعة حسب عدد الحوادث:

عدد الحوادث	صفر	١	٢	٣	المجموع
عدد الوثائق	٣٢٨٨	٦٤٢	٦٦	٤	٤٠٠٠

فاذا علمت أن عدد الحوادث يتبع توزيع بواسون

المطلوب:

حساب احتمال أن عدد الحوادث الذى تتعرض له أى وثيقة هو ٢ على الأقل.

الحل:

يتم أولا حساب قيمة μ (متوسط عدد الحوادث لأى وثيقة) كما يلى:

جدول ١

عدد الحوادث س	عدد الوثائق ك	س ك
صفر	٣٢٨٨	صفر
١	٦٤٢	٦٤٢
٢	٦٦	١٣٢
٣	٤	١٢
المجموع	٤٠٠٠	٧٨٦

∴ $\bar{س}$ = $\frac{٧٨٦}{٤٠٠٠}$ = ١٩٦٥ر

وبمساواة المتوسط النظرى μ بالمتوسط الفعلى $\bar{س}$

∴ إحتمال الحصول على خسارتين على الأقل = إحتمال الحصول على خسارتين أو٣ أو٤ أو . . .

= ١- (إحتمال الحصول على خسارة واحدة أو عدم حدوث أى خسارة)

$$= ١ - \left(\frac{هـ^{-\mu} \times \mu^{١}}{\underline{|١}} + \frac{هـ^{-\mu} \times \mu^{صفر}}{\underline{|صفر}} \right)$$

$$= ١ - \left(\frac{٢ر٧١٨٣^{-١٩٦٥ر} \times ١٩٦٥ر}{\underline{|١}} + ٢ر٧١٨٣^{-١٩٦٥ر} \right)$$

= ١- (١٦١١٤٤ر + ٨٢١٦٠ر)

= ١ - ٩٨٣٠٤ر = ٠١٦٩٦ر

باستخدام التوزيع الطبيعى فإن إحتمال حدوث خسارتين على الأقل

$$= ح \left(ى > \frac{س - \mu}{\sigma} \right) \quad \text{حيث } \sigma = \sqrt{\mu}$$

$$= ح \left(ى > \frac{١ر٥ - ١٩٦٥ر}{٤٤٣٢٨ر} \right)$$

= ح (ى > ٢ر٩٤)

= ١ - ح (ى < ٢ر٩٤)

= ١ - ٩٩٨٣٦ر = ٠٠١٦٤ر

وبمقارنة الإحتمال المحسوب باستخدام الطريقتين نجد أن هناك فرق قدرة =٠١٦٩٦ر - ٠٠١٦٤ر = ٠١٥٢٠ر ونجد أن الفرق كبير نظراً لأن قيمة μ صغيرة (أصغر من ٥ر بمقدار كبير)

مثال (٤) :

اذا علمت أن عدد الحوادث في فرع السيارات يتبع توزيع بواسون بمتوسط قدره ٤٥ر، بالنسبة لإحدى السيارات إحسب إحتمال أن تتعرض لخسارتين على الأقل.

الحل:

أولاً: باستخدام توزيع بواسون:

إحتمال حدوث خسارتين على الأقل = ١- (إحتمال عدم حدوث أى خسارة أو حدوث خسارة واحدة)

$$= ١ - \left(\frac{هـ^{-\mu} \times \mu^{صفر}}{|صفر} + \frac{هـ^{-\mu} \times \mu^{١}}{|١} \right)$$

$$=١-(٢٫٧١٨٣^{-٤٥ر} + ٢٫٧١٨٣^{-٤٥ر} \times ٤٥ر)$$

$$= ١ - (٦٣٧٦٢٨١٥١ر + ٢٨٦٩٣٢٦٦٨ر)$$

$$= ١- ٩٢٤٥٦٠٨١٩ر = ٠٧٥٤٣٩ر$$

ثانياً: باستخدام التوزيع الطبيعي:

إحتمال حدوث خسارتين على الأقل $= ح \left(ى < \frac{س - \mu}{\sigma}\right)$

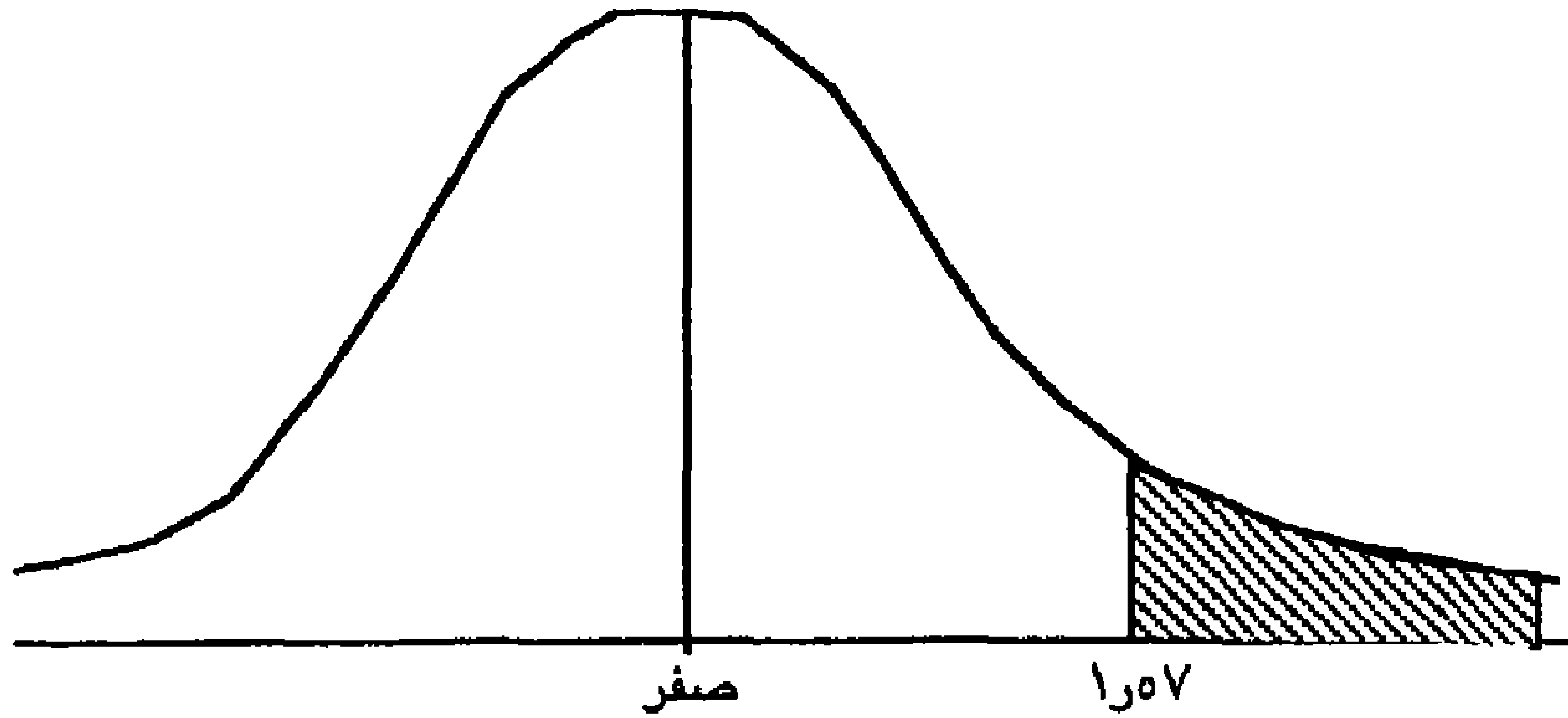
$$= ح \left(ى < \frac{٥ر١ - ٤٥ر}{\sqrt{٤٥ر}}\right)$$

$$= ح \left(ى < \frac{١٫٠٥}{٦٧٠٨٢ر}\right)$$

= ح (ى > ٥٧ر١)

= ١ – ح (ى < ٥٧ر١)

= ١ – ٩٤١٧٩ر = ٠٥٨٢١ر٠



مثال (٥) :

إذا علمت أنه من بين ٢٠٠٠٠ وثيقة تأمين حدث ٢٦٠٠ حادث خلال السنة إحسب إحتمال أن يكون عدد الحوادث خلال العام القادم يقل عن ٥٠٠٠ حادث إذا علمت أن عدد الوثائق المتوقع للعام القادم هو ٤٠٠٠٠ وثيقة وأن عدد الخسائر يتبع توزيع بواسون.

الحل:

إحتمال حدوث الحادث خلال العام الحالى هو $\frac{٢٦٠٠}{٢٠٠٠٠}$ = ١٣ر

عدد الخسائر المتوقع خلال العام القادم من بين ٤٠٠٠٠ وثيقة = ٤٠٠٠٠ × ١٣ر

= ٥٢٠٠

باستخدام التوزيع الطبيعى فإن إحتمال أن عدد الحوادث يقل عن ٥٠٠٠ حادث هو:

ح (ى < $\frac{٤٩٩٩ر٥ - ٥٢٠٠}{\sqrt{٥٢٠٠}}$) = ح (ى < – ٢ر٧٨)

= ح (ى > ٢٫٧٨)

= ١ − ح ى < ٢٫٧٨)

= ١ − ٠٫٩٩٧٢٨ = ٠٫٠٠٢٧٢

ملاحظة :

إذا كان المتوسط μ لتوزيع بواسون يساوى أو أكبر من ٥ فإن النتائج التى نحصل عليها باستخدام التوزيع الطبيعى تكون قريبة جداً من النتائج التى نحصل عليها من توزيع بواسون.

التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ذى الحدين السالب:

بنفس الأسلوب السابق يمكن تقريب توزيع ذى الحدين السالب إلى التوزيع الطبيعى واستخدام جدول التوزيع الطبيعى المعيارى فى حساب الاحتمالات المختلفة باستخدام العلاقة ى = $\frac{س - \mu}{\sigma}$

حيث μ = متوسط توزيع ذى الحدين السالب

، σ = الانحراف المعيارى لتوزيع ذى الحدين السالب

هناك خاصية هامة لتوزيع ذى الحدين السالب تنص على أنه إذا كان لدينا مجموعة من المتغيرات العشوائية المستقلة التى تتبع توزيع ذى الحدين السالب عددها ر ولكل منها المعلمتين ١ ، ل فإن مجموع هذه المتغيرات العشوائية يتبع توزيع ذى الحدين السالب بمعلمتين ر ، ل وكلما زادت قيمة ر كلما إقترب هذا التوزيع من التوزيع الطبيعى وذلك طبقا لنظرية النزعة المركزية.

أسئلة على الوحدة الدراسية التاسعة

١- إذا علمت أنه من بين كل ٢٠٠٠٠ سيارة مؤمن عليها تتعرض ٨٠٠٠ سيارة لحادث واحد خلال السنة، فإذا إخترنا ٥٠٠ سيارة عشوائياً فاحسب بطريقتين مختلفتين:

أ- إحتمال أن يكون من بينها ٢٠٠ سيارة قد تعرضت لحادث.

ب- إحتمال أن يكون من بينها ٢٠٠ سيارة على الأقل قد تعرضت لحادث.

جـ- إحتمال أن يكون من بينها ٢٠٠ سيارة على الأكثر قد تعرضت لحادث.

قارن بين النتائج التى تحصل عليها فى ظل كل طريقة مع التعليق عليها.

٢- فيما يلى بيان عن نتائج فرع السيارات خلال عام ١٩٩٢ بإحدى شركات التأمين المصرية.

عدد الحوادث	صفر	١	٢	٣	المجموع
عدد الوثائق	٨٠٠	١٥٥	٤٠	٥	١٠٠٠

فإذا علمت أن عدد الحوادث يتبع توزيع بواسون

المطلوب:

أ- حساب إحتمال أن عدد الحوادث الذى تتعرض له أى وثيقة هو حادث على الأقل

ب- حساب إحتمال أن عدد الحوادث الذى تتعرض له أى وثيقة هو حادثين فقط.

٣- احسب المطلوب فى السؤال رقم (٢) إذا علمت أن عدد الحوادث يتبع توزيع ذى الحدين السالب.

الوحدة الدراسية العاشرة

التوزيع المناسب لقيمة الخسارة

الوحدة الدراسية العاشرة

موضوعها: التوزيع المناسب لقيمة الخسارة .

هدفها : تعريف الدارس بأهم التوزيعات الإحتمالية المناسبة لقيمة الخسارة .

عناصرها:

- التوزيع اللوغاريتمى الطبيعى .
- التوزيع الأسى السالب .
- توزيع جاما .
- توزيع باريتو .

التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي: Log Normal Distribution

تأخذ دالة كثافة الإحتمال للتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي الشكل الآتي:

$$د(س) = \frac{١}{\sigma س \sqrt{٢ ط}} \times هـ^{-\frac{١}{٢}\left(\frac{لو س - \mu}{\sigma}\right)^{٢}} \text{ ، س > صفر}$$

$$\text{والمتوسط} = هـ^{\mu + \frac{١}{٢}\sigma^{٢}}$$

$$\text{والتباين} = هـ^{(٢\mu + \sigma^{٢})} \times (هـ^{\sigma^{٢}} - ١)$$

وحيث أن الدالة السابقة من الدوال التى يصعب الحصول على تكاملها فقد أمكن إثبات أن المتغير :

$$ى = \frac{لو س - \mu}{\sigma} \text{ يتوزع توزيعاً طبيعاً}$$

وبالتالى يمكن إيجاد قيمة هذا التكامل من جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعى على أساس العلاقة التالية:

$$ح (س \le س) = ح \left(ى \le \frac{لو س - \mu}{\sigma}\right)$$

والمثال التالى يوضح كيفية تطبيق هذه المعادلة.

مثال(١):

إذا علمت أن قيم الخسائر فى فرع التأمين من السطو تتوزع توزيعاً يتبع التوزيع اللوغاريتمى الطبيعى وذلك بمتوسط ٣٣٠٩,٢١١ جنيهاً وتباين ٧٩٨٩٩٠٧ إحسب الإحتمالات الآتية:

أ- أن تكون الخسارة فى حدود ٢٠٠٠ جنيهاً

ب- أن تكون الخسارة فى حدود ٦٠٠٠ جنيهاً

ج- أن تتراوح قيمة الخسارة بين ٦٠٠٠، ١٠٠٠٠ جنيهاً

د- أن تزيد قيمة الخسارة عن ١٠٠٠٠ جنيهاً

الحل:

∵ المتوسط = هـ $^{\quad + \frac{1}{2}\sigma^2}$

والتباين = هـ $^{(2\mu + \sigma^2)}$ × (هـ $^{\sigma^2}$ − ١)

وبالتعويض بقيمتى المتوسط والتباين ينتج أن:

٣٣٠٩,٢١١ = هـ $^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$ (١)

٧٩٨٩٩٠٧ = هـ $^{(2\mu + \sigma^2)}$ × (هـ $^{\sigma^2}$ − ١) (٢)

وبقسمة المعادلة الثانية على مربع المعادلة الأولى ينتج أن :

٧٢٩٦١٣٦ر = هـ $^{\sigma^2}$ − ١

∴ ١,٧٢٩٦١٣٦ = هـ $^{\sigma^2}$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ ينتج أن:

σ^2 = ,٥٤٧٨٩٨

∴ σ = ,٧٤٠٢

وبالتعويض بقيمة σ فى معادلة المتوسط ينتج أن:

$٢١١ر٣٣٠٩ = هـ^{\mu + \frac{١}{٢} \times ٫٥٤٧٨٩٨}$

$٢١١ر٣٣٠٩ = هـ^{\mu + ٫٢٧٣٩٤٩}$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$٨٫١٠٤٤٦٤ = \mu + ٫٢٧٣٩٤٩$

$\therefore \mu = ٧٫٨٣٠٥١٥$

$\therefore ى = \frac{لو س - \mu}{\sigma}$

∴ (أ) إحتمال أن قيمة الخسارة تكون فى حدود ٢٠٠٠ جنيهاً = (٢٠٠٠)

ويتم حسابها كما يلى:

$ى(٢٠٠٠) = \frac{لو ٢٠٠٠ - ٧٫٨٣٠٥١٥}{٫٧٤٠٢}$

$= \frac{٧٫٦٠٠٩٫٢٥ - ٧٫٨٣٠٥١٥}{٫٧٤٠٢} = -٣١ر$

∴ د (٢٠٠٠) = ح (ى < -٫٣١)

، ح (ى < -٫٣١) = ١ - ح (ى > ٫٣١) ويتم الكشف فى جدول التوزيع الطبيعى المعيارى عن هذه القيمة

= ١ - ٫٦٢١٧٢

∴ الاحتمال = ٫٣٧٨٢٨

(ب) إحتمال أن تكون الخسارة فى حدود ٦٠٠٠ جنيهاً = ك(٦٠٠٠)

ويتم حسابها كما يلى :

$$ى = \frac{\text{لو } ٦٠٠٠ - ٧,٨٣٠٥١٥}{,٧٤٠٢}$$

$$= \frac{٨,٦٩٩٥٤٧ - ٧,٨٣٠٥١٥}{,٧٤٠٢}$$

$$= ١,١٧$$

∴ ك (٦٠٠٠) = ح (ى > ١,١٧) ويتم الكشف فى جدول التوزيع الطبيعى المعيارى عن هذه القيمة

∴ الإحتمال = ,٨٧٩

(جـ) إحتمال أن تتراوح الخسارة بين ٦٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ جنيهاً

= ك (١٠٠٠٠) − ك (٦٠٠٠)

$$∴ ى = \frac{\text{لو} ١٠٠٠٠ - ٧,٨٣٠٥١٥}{,٧٤٠٢}$$

$$= \frac{٩,٢١٠٣٤٠٤ - ٧,٨٣٠٥١٥}{,٧٤٠٢}$$

$$= ١,٨٦$$

ح (ى > ١,٨٦) = ,٩٦٨٥٦

∴ د (١٠٠٠٠) – د (٦٠٠٠) = ٩٦٨٥٦, – ٨٧٩,

= ٠٨٩٥٦,

(د) إحتمال أن تزيد قيمة الخسارة عن ١٠٠٠٠ = ١ – د (١٠٠٠٠)

= ١ – ٩٦٨٥٦,

= ٠٣١٤٤,

التوزيع الأسى السالب: Negative exponential distribution

تأخذ دالة كثافة الإحتمال للتوزيع الأسى السالب الشكل الآتي:

$د(س) = ى \times هـ^{-ى س}$ ، $س \geq صفر$

والمتوسط = $\frac{١}{ى}$

والتباين = $\frac{١}{ى^{٢}}$

كما تأخذ دالة التوزيع (دالة الإحتمال التجميعية أو التراكمية) الشكل الآتى:

$د(س) = ١ - هـ^{-ى س}$

والمثال التالى يوضح كيفية الإستفادة من هذا التوزيع فى الحياة العملية.

مثال (٢) :

إذا علمت أن قيم الخسائر فى فرع تأمين الحريق تتبع التوزيع الأسى السالب بمتوسط قدر ٣٣٠٩,٢١١ جنيهاً إحسب :

أ- إحتمال أن قيمة الخسارة الواحدة تكون فى حدود ٢٠٠٠ جنيهاً

ب- إحتمال أن قيمة الخسارة الواحدة تكون فى حدود ٦٠٠٠ جنيهاً

جـ- إحتمال أن قيمة الخسارة الواحدة تكون فى حدود ١٠٠٠٠ جنيهاً

د - إحتمال أن قيمة الخسارة الواحدة تتراوح بين ٦٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ جنيهاً

هـ- إحتمال أن قيمة الخسارة تزيد عن ١٠٠٠٠ جنيهاً

الحل:

∵ المتوسط = $\frac{١}{ى}$

∴ ٣٣٠٩,٢١١ = $\frac{١}{ى}$

∴ ى = ٠٠٠٣٠٢١٩,

∵ د (س) = ١ - هـ $^{- ى س}$

أ- إحتمال أن قيمة الخسارة تكون فى حدود ٢٠٠٠ جنيهاً = د (٢٠٠٠)

، د (٢٠٠٠) = ١ - هـ $^{- ٠٠٠٣٠٢١٩, \times ٢٠٠٠}$

= ١ - هـ $^{- ٦٠٤٣٨,}$

= ١ - ٥٤٦٤١٣٠٩٧,

= ٤٥٣٥٨٦٩,

ب- إحتمال أن قيمة الخسارة تكون فى حدود ٦٠٠٠ جنيهاً = د (٦٠٠٠)

د(٦٠٠٠) = ١ - هـ $^{- ٠٠٠٣٠٢١٩, \times ٦٠٠٠}$

= ١ - هـ $^{- ١,٨١٣١٤}$

= ١ − ,١٦٣١٤١٠٧

= ,٨٣٦٨٥٨٩٣

جـ− إحتمال أن قيمة الخسارة تكون فى حدود ١٠٠٠٠ جنيهاً = د (١٠٠٠٠)

، د(١٠٠٠٠) = ١ − $هـ^{-٠,٠٠٠٣٠٢١٩ \times ١٠٠٠٠}$

= ١ − $هـ^{-٣,٠٢١٩}$

= ١ − ,٠٤٨٧٠٨٥٩

= ,٩٥١٢٩١٤١

د− إحتمال أن قيمة الخسارة تتراوح بين ٦٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ جنيهاً

= د(١٠٠٠٠) − د(٦٠٠٠)

= ,٩٥١٢٩١٤١ − ,٨٣٦٨٥٨٩٣

= ,١١٤٤٣٢٤٨

هـ− إحتمال أن قيمة الخسارة تزيد عن ١٠٠٠٠ جنيهاً = ١ − د(١٠٠٠٠)

= ١ − ,٩٥١٢٩١٤١ = ,٠٤٨٧٠٨٥٩

توزيع جاما Gamma distribution

تأخذ دالة كثافة الإحتمال لتوزيع جاما الشكل الآتى:

$$د(س) = \frac{\beta}{\Gamma ى} هـ^{-\beta س} (\beta س)^{ى-1} \quad ، صفر \leq س < \alpha$$

ومتوسط التوزيع =

وتباين التوزيع = $\frac{ى}{\beta}$

وتباين التوزيع = $\frac{ى}{\beta^{٢}}$

حيث ى ، β هما معلمتا التوزيع ، Γى تتوقف على قيمة ى :

فإذا كانت ى رقماً صحيحاً فإن Γى = (ى - ١)!

وإذا كانت ى رقماً كسرياً أو رقماً صحيحاً وكسر فإن لها جداول خاصة كما تأخذ دالة التوزيع الشكل التالي:

$$د(س) = \int_{صفر}^{س} \frac{\beta}{\Gamma ى} هـ^{-\beta س} (\beta س)^{ى - ١} \; ءس$$

وهذا التكامل المحدود ليس من السهل إيجاد قيمته بالطرق المعروفة للتكامل ولكن توجد جداول خاصة عند قيم مختلفة لكل من β ، ى وتسمى جداول التكاملات المحدودة لدالة جاما Incomplete Gamma Function tables .

ونظراً لعدم توافر هذه الجداول فإنه توجد طريقة تقريبية يمكن من خلالها إيجاد قيمة هذا التكامل وهي:

$$ص[ع(س)] = \frac{١}{٢}(١+ \sum_{ر=١}^{٤} ب_ر / ع(س)^{ر})^{-٤}$$

عند ع (س) < صفر

$$أو = ١ - \frac{١}{٢}(١+ \sum_{ر=١}^{٤} ب_ر / ع(س)^{ر})^{-٤}$$

عند ع (س) ≥ صفر

$$\text{حيث } ع(س) = ٣\, ى^{\frac{١}{٦}} (\beta\, س)^{\frac{١}{٣}} + \frac{١}{٣\sqrt{ى}} (١ - ٩\, ى)$$

، $ب_{١}$ = ,١٩٦٨٥٤

$ب_{٢}$ = ,١١٥١٩٤

$ب_{٣}$ = ,٠٠٠٣٤٤

$ب_{٤}$ = ,٠١٩٥٢٧

والمثال التالى يوضح كيفية تطبيق المعادلة السابقة:

مثال (٣) :

إذا علمت أن قيمة الخسارة فى فرع التأمين من السطو تتبع توزيع جاما وذلك بمتوسط ٣٣٠٩,٢١١ جنيهاً وتباين ٧٩٨٩٩٠٧

إحسب الإحتمالات الأتية:

أ- أن تكون الخسارة فى حدود ٢٠٠٠ جنيهاً

ب- أن تكون الخسارة فى حدود ٦٠٠٠ جنيهاً

ج- أن تتراوح قيمة الخسارة بين ٦٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ جنيهاً

د- أن تزيد قيمة الخسارة عن ١٠٠٠٠ جنيهاً

الحل :

$$\therefore \text{المتوسط} = \frac{ى}{\beta}$$

، التباين = $\frac{\text{ى}}{\beta^{2}}$

∴ $\frac{\text{ى}}{\beta}$ = ٣٣٠٩,٢١١

، $\frac{\text{ى}}{\beta^{2}}$ = ٧٩٨٩٩٠٧

ويقسمة المعادلة الأولى على المعادلة الثانية ينتج أن:

$\frac{٣٣٠٩,٢١١}{٧٩٨٩٩٠٧} = \frac{\text{ى}}{\beta} \times \frac{\beta^{2}}{\text{ى}}$

∴ β = ,٠٠٠٤١٤١٧ وبالتعويض بقيمة β فى معادلة المتوسط

∴ ٣٣٠٩,٢١١ = $\frac{\text{ى}}{٠,٠٠٠٤١٤١٧}$

∴ ى = ١,٣٧٠٥٨٨٤٨

وبالتعويض بقيمتى ى ، β فى المعادلة التقريبية للتكامل ينتج أن :

∴ ع (س) = ٣ ى $\frac{١}{٦}$ (β س) $\frac{١}{٣}$ + $\frac{١}{٣\sqrt{\text{ى}}}$ (١ - ٩ ى)

(أ) إحتمال أن تكون الخسارة فى حدود ٢٠٠٠ جنيهاً = ص [ع (٢٠٠٠)]

∴ ع (٢٠٠٠) = ٣ × (١,٣٧٠٥٨٨٤٨) $\frac{١}{٦}$ × (٢٠٠٠ × ,٠٠٠٤١٤١٧) $\frac{١}{٣}$

$$+ \frac{١}{٣\sqrt{١,٣٧٠٥٨٨٤٨}} \quad (١ - ٩ \times ١,٣٧٠٥٨٨٤٨)$$

= ٣,٦١٨٣٤٤ × ٩٣٩١٥٥٫٩٣٩١٥٥٧٣ − ٣,٢٢٧٤٣٩٣٠٦

= − ٫٢٥٧٩٨٤٤٤٤ < صفر

∴ ص[ع (س)] = $\frac{١}{٢}$ (١+ مجـ$_{ر=١}^{٤}$ ب$_{ر}$ / ع (س)/^{ر})$^{-٤}$

∴ ص [ع (٢٠٠٠)] = $\frac{١}{٢}$ [١ + (٫١٩٦٨٥٤ × (٫٢٥٧٩٨٤٤)^{١} +

٫١١٥١٩٤ × (٫٢٥٧٩٨٤٤)^{٢} + ٫٠٠٠٣٤٤

×(٫٢٥٧٩٨٤٤)^{٣} + ٫٠١٩٥٢٧ ×(٫٢٥٧٩٨٤٤)^{٤})]$^{-٤}$

= ٫٣٩٨٢٢٩٥٥٥

(ب) إحتمال أن تكون الخسارة فى حدود ٦٠٠٠ جنيهاً = ص [ع (٦٠٠٠)]

، ص [ع (٦٠٠٠)] = ٫٨٥٤١٣٣١

(ج) إحتمال أن قيمة الخسارة تتراوح بين ٦٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ جنيهاً =

ص [ع (١٠٠٠٠)] − ص [ع (٦٠٠٠)]

ص [ع (١٠٠٠٠)] = ٫٩٦٨٠٩٣٢١٧

، ص [ع (٦٠٠٠)] = ٫٨٥٤١١٣٣١

∴ إحتمال أن تتراوح الخسارة بين ٦٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ =

٫٩٦٨٠٩٣٢١٧ − ٫٨٥٤١١٣٣١ = ٫١١٣٩٧٩٩٠٧

(د) إحتمال أن تزيد قيمة الخسارة عن ١٠٠٠٠ جنيهاً = ١ − ص[ع (١٠٠٠٠)]

= ١ − ٩٦٨٠٩٣٢١٧ر

= ٠٣١٩٠٦٧٨٣ر

توزيع باريتو: Pareto distribution

تأخذ دالة كثافة الإحتمال لتوزيع باريتو الشكل التالي:

$$د(س) = \frac{ى}{\beta}\left(\frac{\beta}{س}\right)^{ى+١} \quad ، \quad س > \beta$$

حيث متوسط التوزيع = $\frac{ى\,\beta}{ى-١}$

، تباين التوزيع = $\frac{ى\,\beta^{٢}}{ى-٢} - \left(\frac{ى\,\beta}{ى-١}\right)^{٢}$

كما تأخذ دالة التوزيع الشكل التالي:

$$د(س) = ١ - \left(\frac{\beta}{س}\right)^{ى} \quad ، \quad س > \beta$$

وهو من التوزيعات الملتوية جهة اليمين Positive skewed

ويستخدم هذا التوزيع في تحديد تكلفة إتفاقيات عمليات إعادة التأمين وخاصة ماجاوز حداً من الخسارة نظراً لأن زيل التوزيع لايقترب من المحور الأفقي بسرعة كبيرة كما في التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي.

ويشترط لوجود المتوسط أن تكون ى أكبر من واحد ويشترط لوجود التباين أن تكون ى أكبر من ٢ وهذه القيود تعنى أنه فى الحياة العملية يصعب إستخدامه في حالات كثيرة ولذا يفضل عليه التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي.

والأمثلة التالية توضح كيفية الإستفادة من هذا التوزيع فى حساب الإحتمالات المختلفة .

مثال(٤):

إذا علمت أن الخسائر الخاصة بفرع السيارات تتبع توزيع باريتو بمعلمتين:

ى = ٣ ، β = ٢٠٠٠ إحسب إحتمال أن قيمة الخسارة في هذا الفرع تزيد عن ٥٠٠٠ جنية .

الحل:

أ- حيث أن الخسائر فى هذا الفرع تتبع توزيع باريتو فإن دالة التوزيع هى:

$$د\,(س) = ١ - \left(\frac{\beta}{س}\right)^{ى} \qquad ، س > \beta$$

وبوضع β = ٢٠٠٠ ، ى = ٣ فإن:

إحتمال أن تزيد قيمة الخسارة عن ٥٠٠٠ جنيهاً = ١ - د (٥٠٠٠)

$$د\,(٥٠٠٠) = ١ - \left(\frac{٢٠٠٠}{٥٠٠٠}\right)^{٣}$$

= ١ - ٠٦٤,

= ٩٣٦,

١٠٠ - د (٥٠٠٠) = ١ - ٩٣٦ر

= ٠٦٤ر

مثال(٥):

إذا علمت أن الخسائر الخاصة بفرع السطو تتبع توزيع باريتو وتأخذ دالة التوزيع الشكل التالي:

د (س) = ١ − $\left(\frac{\text{١٧٠٠}}{\text{س}}\right)^{\text{٢}}$ ، س > ١٧٠٠

إحسب الإحتمالات الآتية:

أ- أن قيمة الخسائر تكون فى حدود ٤٠٠٠ جنيهاً

ب- أن قيمة الخسائر تزيد عن ١٠٠٠٠ جنيهاً

ج- أن قيمة الخسائر تتراوح بين ٤٠٠٠٠، ١٠٠٠٠ جنيهاً

الحل:

∵ د (س) = ١ − $\left(\frac{\text{١٧٠٠}}{\text{س}}\right)^{\text{٢}}$

∴ إحتمال أن قيمة الخسارة تكون فى حدود ٤٠٠٠٠ جنيهاً = د (٤٠٠٠)

، د (٤٠٠٠) = ١ − $\left(\frac{\text{١٧٠٠}}{\text{٤٠٠٠}}\right)^{\text{٢}}$

= ١ − ,١٨٠٦٢٥

= ,٨١٩٣٧٥

(ب) إحتمال أن قيمة الخسارة تزيد عن ١٠٠٠٠ جنيهاً = ١ − د (١٠٠٠٠)

، د (١٠٠٠٠) = ١ − $\left(\frac{\text{١٧٠٠}}{\text{١٠٠٠٠}}\right)^{\text{٢}}$

= ١ − ٠٢٨٩ر

= ٩٧١١ر

١٠٠٠ – د (١٠٠٠٠) = ١ – ٩٧١١ر

= ٠٢٨٩ر

(ج) إحتمال أن تتراوح قيمة الخسارة بين ٤٠٠٠، ١٠٠٠٠ جنيهاً

= د (١٠٠٠٠) – د (٤٠٠٠) = ٩٧١١ر – ٨١٩٣٧٥ر

= ١٥١٧٢٥ر

أسئلة على الوحدة الدراسية العاشرة

(١) إذا علمت أن قيمة الخسارة فى فرع الحريق تتوزع طبقاً للتوزيع اللوغاريتمى الطبيعى بمتوسط ٢٠٠٠ جنيهاً وتباين ٢٨٩٠٠٠٠ إحسب الإحتمالات الآتية:

أ- أن تكون الخسارة فى حدود ١٤٠٠ جنيهاً

ب- أن تكون الخسارة فى حدود ٥٠٠٠ جنيهاً

ج- أن تترواح قيمة الخسارة بين ٤٠٠٠، ٧٠٠٠ جنيهاً

د- أن تزيد قيمة الخسارة عن ٦٥٠٠ جنيهاً

(٢) فيما يلى بيان عن توزيع قيم الخسائر خلال عام ١٩٩٠ فى فرع الحريق بشركة مصر للتأمين :

فئة الخسارة	صفر-	٣٠٠٠-	٦٠٠٠-	٩٠٠٠-	١٢٠٠٠-	١٥٠٠٠-	١٨٠٠٠-٢١٠٠٠
عدد الخسائر	٤٦٥	٤٣٠	١٧٠	٧٢	٣١	١٦	٦

فإذا علمت أن توزيع قيم الخسائر قريب جداً من التوزيع اللوغاريتمى الطبيعى

إحسب: أ- إحتمال أن قيمة الخسارة تقل عن ١٥٠٠ جنيهاً

ب- إحتمال أن قيمة الخسارة تزيد عن ١٣٠٠٠ جنيهاً

ج- إحتمال أن قيمة الخسارة تتراوح بين ٦٥٠٠، ١١٥٠٠ جنيهاً

(٣) إذا علمت أن قيمة الخسارة تتبع التوزيع الأسى السالب بمتوسط ٢٠٠٠ جنيهاً وتباين ٢٨٩٠٠٠٠ إحسب الإحتمالات الآتية:

أ- أن تكون الخسارة فى حدود ١٤٠٠ جنيهاً

ب- أن تكون الخسارة فى حدود ٥٠٠٠ جنيهاً

ج- أن تتراوح قيمة الخسارة بين ٤٠٠٠، ٧٠٠٠ جنيهاً

د- أن تزيد قيمة الخسارة عن ٦٥٠٠ جنيهاً.

(٤) فيمايلى بيان عن توزيع خسائر فرع السطو بشركة مصر للتأمين خلال عام ١٩٩٠ حسب القيمة:

فئة الخسارة	صفر-	٤٠٠٠-	٨٠٠٠-	١٢٠٠٠-	١٦٠٠٠-	٢٠٠٠٠-	٢٤٠٠٠-٢٨٠٠٠
عدد الخسائر	٩٧٠	٧٢٠	٣٨٠	١٨٠	٨٥	٤١	١٩

فإذا علمت أن التوزيع السابق قريب جداً من توزيع جاما إحسب:

أ- إحتمال أن تزيد قيمة الخسارة عن ١١٠٠٠ جنيهاً

ب- إحتمال أن تقل قيمة الخسارة عن ١٣٠٠٠ جنيهاً

ج- إحتمال أن تتراوح قيمة الخسارة بين ١٣٠٠٠، ١٥٠٠٠ جنيهاً

(٥) إذا علمت أن الخسائر الخاصة بفرع المسئولية تتبع توزيع باريتو، وتأخذ دالة التوزيع الشكل التالى:

$$د\,(س) = ١ - \left(\frac{١٨٠٠}{س}\right)^{٣}$$

إحسب:

أ-إحتمال أن قيمة الخسارة تقل عن ٤٥٠٠ جنيهاً

ب- إحتمال أن قيمة الخسارة تزيد عن ٦٠٠٠ جنيهاً

ج- إحتمال أن قيمة الخسارة تتراوح بين ٥٠٠٠، ٧٠٠٠ جنيهاً

(٦) إذا علمت أن الخسائر الخاصة بفرع المسئولية تتبع توزيع باريتو بمعلمتين ى = ٢ ، β = ١٥٠٠ إحسب:

أ- إحتمال أن قيمة الخسارة تزيد عن ٣٥٠٠ جنيهاً

ب- إحتمال أن تتراوح قيمة الخسارة بين ٣٥٠٠ ، ٥٥٠٠ جنيها

الوحدة الدراسية الحادية عشرة
توفيق توزيع احتمالى نظرى مناسب للتوزيع الاحتمالى الفعلى لعدد الحوادث واختبار جودة التوفيق

الوحدة الدراسية الحادية عشرة

موضوعها : توفيق توزيع إحتمالى نظرى مناسب للتوزيع الاحتمالى الفعلى لعدد الحوادث وإختبار جودة التوفيق .

هدفها : تعريف الدارس بكيفية تحديد التوزيع الاحتمالى النظرى المناسب للتوزيع التكرارى الفعلى لعدد الحوادث .

عناصرها :

- طرق تقدير معالم التوزيع بنقطة :
  - طريقة المربعات الصغرى .
  - طريقة دالة الإمكان الأعظم .
  - طريقة العزوم .
- إختبار كا٢ لجودة التوفيق .
- إختبار سميرنوف كلموجروف .

طرق تقدير معالم التوزيع بنقطة :

نحتاج فى حالات كثيرة أن نحدد التوزيع الإحتمالى النظرى الأمثل والمناسب لتوزيع إحتمالى (أو تكرارى) فعلى معلوم ، ذلك أن تحديد التوزيع الإحتمالى النظرى يتميز بتلخيص جميع البيانات المتعلقة بالتوزيع الفعلى فى دالة رياضية واحدة يمكن من خلالها حساب جميع الاحتمالات (أو التكرارات) المناظرة لقيمة معينة (أو أقل أو أكبر منها) من قيم المتغير العشوائى ، بل يمكن حساب الاحتمالات خارج نطاق القيم الفعلية للمتغير العشوائى ومثال على ذلك فإن التوزيع التكرارى لقيم الخسائر الفعلية قد ينتهى عند الفئة ٢٠٠٠٠ – ٣٠٠٠٠ جنيه وهذا يعنى أن أقصى قيمة للخسائر هى ٣٠٠٠٠ جنيهاً على الرغم من أن هناك إحتمال أن تزيد الخسائر الفعلية عن هذه القيمة ومع هذا فإن التكرار الفعلى المناظر للخسائر التى تزيد عن ٣٠٠٠٠ جنيها هو صفر وبالتالى فإن إحتمالها صفر ولكن بإستخدام التوزيع النظرى يمكن حساب إحتمال أن تزيد الخسائر عن ٣٠٠٠٠ جنيها (لأن المنحنى يكون ممهداً) وتكون له قيمة .

ولتحديد التوزيع النظرى المناسب للتوزيع الفعلى فلابد من تقدير معالم التوزيع ، فلكل توزيع معلمة على الأقل ويتم تقدير هذه المعالم من خلال تحديد هذه المعالم للتوزيع الفعلى ويمساواتها بمعالم التوزيع النظرى يمكن تحديد الاحتمالات النظرية ومنها يتم حساب التكرارات النظرية وإختبار مدى تطابقها مع التكرارات الفعلية وبالتالى إتخاذ قرار بالنسبة للفرض الخاص بمدى تطابق التوزيع النظرى محل الاختبار مع التوزيع الفعلى ، وطالما أننا سوف نقدر المعالم الخاصة بالتوزيع بقيمة وحيدة فإننا سوف نتعرض لطرق التقدير بنقطة Point estimation methods والتى من أهمها:

١–طريقة المربعات الصغرى: Least square method

تعتمد هذه الطريقة على تقدير المعلمة أو المعالم المجهولة والتى تؤدى إلى أن يكون الفرق بين البيانات الفعلية والبيانات النظرية المحسوبة بإستخدام المعالم المقدرة أقل مايمكن ، ويتم حل معادلتين أو أكثر معاً (حسب عدد المعالم المجهولة) ومنها يتم تقدير المعالم المجهولة .

٢-طريقة دالة الامكا ن الاعظم Maximum likelihood method

تعتمد هذه الطريقة على إستخدام التقدير الذى يعظم إمكانية الحدث المشاهد أو الملاحظ ولذلك فإننا نبحث عن التقدير من العينة الذى يجعل دالة الامكان الاعظم فى نهايتها العظمى .

٣-طريقة العزوم Method of moments:

تعتمد هذه الطريقة على حساب العزمين الأول والثانى (أو العزوم الثلاثة الأولى إذا كان عدد المعالم ثلاثة) من البيانات الفعلية ومساواتهما بالعزمين الأول والثانى النظريين ومن خلال حل المعادلات النظرية الخاصة بالعزوم يتم الحصول على قيم معالم التوزيع .

وأكثر الطرق شيوعاً فى الاستخدام طريقة العزوم ثم طريقة دالة الامكان الاعظم (وإن كانت دالة الامكان الأعظم أكثر دقة) وسوف نعتمد على طريقة العزوم لتقدير المعالم المجهولة للتوزيعات .

وبعد تقدير معالم التوزيع النظرى المجهولة تستخدم فى حساب الاحتمالات وبالتالى التكرارات المناظرة لكل قيمة (أو فئة) من قيم المتغير العشوائى ولكن ماهى أداة الاختبار المستخدمة فى تحديد مدى مطابقة التوزيع النظرى للتوزيع الفعلى ؟ يمكن القول أن هناك أداتان يمكن إستخدامهما فى تحديد مدى مطابقة التوزيع النظرى للتوزيع الفعلى (جودة التوفيق) وهما :

أولاً-إختبار كا٢ لجودة التوفيق :

Chi-square (X^2) test for goodness of fit

يستخدم إختبار كا٢ للمقارنة بين التوزيع التكرارى النظرى أو المتوقع والتوزيع التكرارى المشاهد أو الفعلى وتحديد ما إذا كان هناك فرقاً بينهما أم لا ، وبمعنى آخر فإنه بإستخدام إختبار كا٢ يمكن تحديد ما إذا كان الفرق الظاهر بين التوزيعين هو فرقاً معنوياً أم

هو فرقاً راجعاً للصدفة والأمثلة التالية توضح كيفية إستخدام هذا الاختبار .

مثال (١) :

فيما يلى بيان عن عدد وثائق تأمين السيارات التكميلى (بالألف) فى مجموعة من شركات التأمين المصرية خلال عام ١٩٩٠ :

الشركة	مصر	الشرق	الأهلية	المهندس	الدلتا	قناة السويس
عدد الوثائق	٥ر١٢	٥ر١٤	٨	٧	٥ر٨	٥ر٩

إختبر صحة الفرض القائل بأن عدد الوثائق يتبع التوزيع المنتظم .

الحـــل:

لتوفيق منحنى منتظم يمثل هذه البيانات فإننا نفترض نظرياً أن عدد الوثائق فى كل شركة متساو مع عد الوثائق فى الشركات الأخرى أى أن

$$\text{عدد الوثائق فى كل شركة} = \frac{\text{عدد الوثائق الاجمالى}}{\text{عدد الشركات}} = \frac{٦٠}{٦} = ١٠$$

أى أن التوزيع النظرى هو

الشركة	مصر	الشرق	الأهلية	المهندس	الدلتا	قناة السويس
عدد الوثائق	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠

ولتطبيق توزيع كا^2 فإنه هناك مجموعة من الشروط لابد من توافرها ومن أهمها:

أ – أن تكون المشاهدات مستقلة عن بعضها البعض .

ب– أن يكون مجموع التكرارات كبيراً جداً (أكبر من ٣٠) .

حـ– أن يكون التكرار المتوقع المناظر لكل خلية يساوى أو أكبر من ٥ (ويفضل أن يساوى ١٠) وفى حالة عدم توافر هذا الشرط يمكن إدماج فئتين أو أكثر معاً .

وفى حالة توافر هذه الشروط فإن المتغير : مجـ $\left[\frac{(\text{التكرار المشاهد} - \text{التكرار المتوقع})^{٢}}{\text{التكرار المتوقع}}\right]$

يتبع توزيع كا^{٢} بدرجات حرية (ن–١) ودرجة ثقة معينة ، فإذا كانت كا^{٢} الجدولية
ر من كا^{٢} المحسوبة فإنه لايوجد فرق بين التوزيع النظرى والتوزيع الفعلى والعكس صحيح
جدول التالى يوضح خطوات حساب كا^{٢} المحسوبة :

جـــدول رقم ١

الشركة	التكرار المشاهد	التكرار المتوقع	المشاهد – المتوقع	$\frac{(\text{المشاهد}-\text{المتوقع})^{٢}}{\text{المتوقع}}$ = كا^{٢}
مصر	١٢ر٥	١٠	٢ر٥	٠ر٦٢٥
الشرق	١٤ر٥	١٠	٤ر٥	٢ر٠٢٥
الأهلية	٨	١٠	٢-	٠ر٤
المهندس	٧	١٠	٣-	٠ر٩
الدلتا	٨ر٥	١٠	١ر٥-	٠ر٢٢٥
قناة السويس	٩ر٥	١٠	ر٥-	٠ر٠٢٥
المجموع	٦٠	٦٠	صفر	٤ر٢

∴ كا^{٢} المحسوبة = ٢ر٤ .

، كا^{٢} الجدولية (٥ ، ٥٪) = ١ر١١ .

وحيث أن كا^{٢} الجدولية أكبر من المحسوبة فإننا نقبل الفرض القائل بأن عدد الوثائق يتبع التوزيع المنتظم .

مثال (٢) :

فيما يلي بيان عن عدد الخسائر في فرع السيارات بإحدى شركات التأمين خلال عام ١٩٩٠ .

عدد الخسائر	صفر	١	٢	٣	٤
عدد الوثائق	٤٨٦	٣٨٢	١١٣	١٧	١

إختبر الفرض القائل بأن عدد الخسائر في هذه الشركة يتبع ـيع ذى الحدين

الحـــل:

للتحـقق من هذا الفـرض فـإنه لابد من الحـصـول على التكرارات النظرية بإستخدام توزيع ذى الحدين وللحصول على التكرارات النظرية لابد عن الحصول على معـالم التـوزيـع ، وحيث أن توزيع ذى الحدين توزيع ذى معلمة واحدة فإننا لانحتاج إلا إلى العزم الأول الفعلى (المتوسط) ويتم حسابه من البيانات السابقة كما يلى :

جدول رقم ٢

عدد الخسائر س	عدد الوثائق ك	عدد الخسائر × عدد الوثائق س × ك
صفر	٤٨٦	صفر
١	٣٨٢	٣٨٢
٢	١١٣	٢٢٦
٣	١٧	٥١
٤	٢	٨
المجموع	١٠٠٠	٦٦٧

$$\because \bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}$$

$$= \frac{٦٦٧}{١٠٠٠} = ٦٦٧\text{ر}$$

وبمساواة المتوسط الفعلى $\bar{\text{س}}$ بالمتوسط النظرى μ وحيث أن :

$\mu = \text{ن} \times \text{ل}$ وبوضع $\bar{\text{س}} = \mu$

$$\therefore \bar{\text{س}} = \text{ن} \times \text{ل}$$

$$\therefore ٦٦٧\text{ر} = ٤ \times \text{ل}$$

$$\therefore \text{ل} = \frac{٦٦٧\text{ر}}{٤} = ١٦٦٧٥\text{ر}$$

$$، ١ - \text{ل} = ١ - ١٦٦٧٥\text{ر}$$

$$= ٨٣٣٢٥\text{ر}$$

، $\because$ دالة توزيع ذى الحدين هى $\text{د(س)} = \binom{\text{ن}}{\text{س}} \text{ل}^{\text{س}} (١ - \text{ل})^{\text{ن} - \text{س}}$

وبوضع ~ = ٤ ، ل = ١٦٦٧٥ر ، ١- ل = ٨٣٣٢٥ر

وبالتعويض عن س = صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ نحصل على :

س :	صفر	١	٢	٣	٤
ك (س) :	٤٨٢ر	٣٨٦ر	١١٦ر	٠١٥ر	٠٠١ر

ويضرب هذه الاحتمالات في العدد الكلى للوثائق وهو ١٠٠٠ نحصل على التكرار النظرى المناظر لكل قيمة من قيم المتغير العشوائى س وهو (عدد الخسائر) والموضح فيما يلى :

عدد الخسائر	صفر	١	٢	٣	٤	المجموع
عدد الوثائق	٤٨٢	٣٨٦	١١٦	١٥	١	١٠٠٠

ثم يتم حساب قيمة كا^{٢} من خلال الجدول التالى

جدول رقم ٣

عدد الخسائر	ك المشاهد	ك النظرى	(ك المشاهد – ك المتوقع)	~ كا^{٢} المحسوبة
صفر	٤٨٦	٤٨٢	٤	٠٣ر
١	٣٨٢	٣٨٦	٤-	٠٤ر
٢	١١٣	١١٦	٣-	٠٨ر
٣	١٩	١٦	٣	٢٦ر
–	–	–	–	–
المجموع	١٠٠٠	١٠٠٠	صفر	٤١ر٠

* **ملاحظة** : تم دمج التكرارات المناظرة لعدد الخسائر ٣، ٤ لأن التكرار المناظر لعدد الخسائر ٤ أقل من ٥ حتى يمكن تطبيق شروط توزيع كا^2 مع خصم درجة حرية أخرى مقابل عملية الدمج .

∴ كا^2 الجدولية [كا^2 (٢ ، ٥٪)] = ٩٩ر٥

وحيث أن كا^2 المحسوبة أصغرمن الجدولية فإننا نقبل الفرض القائل بأن البيانات الخاصة بعدد الخسائر تتبع توزيع ذى الحدين .

ثانياً :إختبار سميرنوف كلموجروف Kolmogrov Smirnov Test

هذا الاختبار أقوى من إختبار كا^2 ويفضل تطبيقه دائماً بالاضافة إلى أن هذا الاختبار ليس له أى شروط ويعتمد على مقارنة أكبر فرق مطلق بين الاحتمال التجميعى الفعلى والاحتمال التجميعى النظرى بقيمة جدولية لجدول يحمل نفس إسم الاختبار والجدول التالى يوضح كيفية تطبيق هذا الاختبار على بيانات المثال السابق :

جدول رقم ٤ إختبار سميرنوف لتوزيع ذى الحدين

الفئة	التكرار الفعلى	التكرار النظرى	الاحتمال التجميعى الفعلى	الاحتمال التجميعى النظرى	الفرق
صفر	٤٨٦	٤٨٢	٤٨٦ر	٤٨٢ر	٠٠٤ر
١	٣٨٢	٣٨٦	٨٦٨ر	٨٦٨ر	–
٢	١١٣	١١٦	٩٨١ر	٩٨٤ر	−٠٠٣ر
٣	١٧	١٥	٩٩٨ر	٩٩٩ر	٠٠١ر
٤	٢	١	١	١	–

من الجدول السابق يتضح أن أكبر فرق هو ٠٠٤ر وهى تمثل قيمة سميرنوف المحسوبة وبإستخراج قيمة سميرنوف الجدولية (والموجودة بالملاحق) المناظرة لحجم العينة

وتحت احتمال معين مع مراعاة أنه فى حالة زيادة حجم العينة عن ٣٥ فإن قيمة سميرنوف تساوى $\frac{\text{آخر قيمة فى الجدول}}{\sqrt{\text{حجم العينة}}}$

ومن الجدول تحت إحتمال ٥٪ نجد أن قيمة سميرنوف = $\frac{١٫٣٦}{\sqrt{١٠٠٠}} = \frac{١٫٣٦}{٣١٫٦٢} =$ ٠٤٣ر

وحيث أن قيمة سميرنوف الجدولية أكبر من المحسوبة فإننا نقبل الفرض العدمى أى أن توزيع عدد الخسائر يتبع توزيع ذى الحدين .

مثال (٣) :

فيما يلى بيان عن توزيع عدد الوثائق فى شركة مصر للتأمين بفرع الحريق حسب عدد حالات الخسارة خلال عام ١٩٩٠ :

عدد حالات الخسائر	صفر	١	٢	٣	٤
عدد الوثائق	١٧٥٤٩	١١٠٤	٥٣	٢	صفر

اختبر صحة الفرض القائل بأن هذه البيانات تخضع لتوزيع بواسون

الحل :

تأخذ دالة كثافة الاحتمال لتوزيع بواسون الشكل التالى :

$$د(س) = \frac{هـ^{-\mu} \times \mu^{س}}{\lfloor س}$$ ، س = صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، .... إلى ∞

وحيث أن دالة بواسون لها معلمة واحدة وهى المتوسط μ فإنه يتم حساب المتوسط الفعلى $\bar{س}$ من البيانات كما يلى :

جدول رقم ٥

عدد الخسائر س̄	عدد الوثائق ك	عدد الوثائق × عدد الخسائر س × ك
صفر	١٧٥٤٩	صفر
١	١١٠٤	١١٠٤
٢	٥٣	١٠٦
٣	٢	٦
٤	صفر	صفر
المجموع	١٨٧٠٨	١٢١٦

∵ س̄ = $\frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}$ = $\frac{١٢١٦}{١٨٧٠٨}$ = ٠٦٥ر٠ .

ويمساواة المتوسط الفعلى بالمتوسط النظرى .

∴ μ = ٠٦٥ر٠

∴ ى(صفر) = (٢ر٧١٨٢٨)$^{-٠٦٥ر٠}$ = ٩٣٧٠٦٧ر٠

، ∴ ى(١) = $\frac{(٢ر٧١٨٢٨)^{-٠٦٥ر٠} \times ٠٦٥ر٠}{\lfloor ١}$ = ٠٦٠٩٠٩ر٠

، ∴ ى(٢) = $\frac{(٢ر٧١٨٢٨)^{-٠٦٥ر٠} \times (٠٦٥ر٠)^{٢}}{\lfloor ٢}$ = ٠٠١٩٨٠ر٠

، ∴ ى(٣) = $\frac{(٢ر٧١٨٢٨)^{-٠٦٥ر٠} \times (٠٦٥ر٠)^{٣}}{\lfloor ٣}$ = ٠٠٠٠٤٣ر٠

، ∴ ى(٤) = $\frac{(٢ر٧١٨٢٨)^{-٠٦٥ر٠} \times (٠٦٥ر٠)^{٤}}{\lfloor ٤}$ = ـ

المجموع = ١

ويضرب هذه الاحتمالات × مجموع التكرارات وهو ١٨٧٠٨ نحصل على التكرارات المناظرة لكل قيمة من قيم الخسائر (التوزيع النظرى) وذلك كما يلى :

جدول رقم ٦

عدد الخسائر	الاحتمال	التكرار النظرى
صفر	٩٣٧٠٦٧ر	١٧٥٣١
١	٠٦٠٩٠٩ر	١١٣٩
٢	٠٠١٩٨٠ر	٣٧
٣	٠٠٠٠٤٣ر	١
٤	صفر	صفر
المجموع	١	١٨٧٠٨

ونلاحظ أن تطبيق إختبار كا^2 يحتاج إلى دمج التكرار المناظر للفئة الرابعة مع الثالثة لأن تكرار الفئة الرابعة أقل من ٥ وهذا يحتاج إلى خصم درجة حرية مقابل عملية الدمج وحيث أن عدد الفئات سيصبح ثلاثة بعد عملية الدمج وأننا سنخصم درجة حرية فإن عدد درجات الحرية المتبقية بعد الخصم ستصبح درجة واحدة (٣-٢=١) وهذا أمر غير منطقى ويضعف من قيمة الاختبار ، ولذلك يفضل تطبيق إختبار سميرنوف كلموجروف والذى يتم حسابه كما يلى :

جدول رقم ٧ إختبار سميرنوف لتوزيع بواسون

الفئة	التكرار الفعلى المتجمع	التكرار النظرى المتجمع	الاحتمال الفعلى المتجمع	الاحتمال النظرى المتجمع	الفرق
صفر	١٧٥٤٩	١٧٥٣١	٩٣٨٠٤٨ر	٩٣٧٠٨٦ر	٠٠٠٩٦٢ر
١	١٨٦٥٣	١٨٦٧٠	٩٩٧٠٦٠ر	٩٩٧٩٦٩ر	٠٠٠٩٠٩ر
٢	١٨٧٠٦	١٨٧٠٧	٩٩٩٨٩٣ر	٩٩٩٩٤٦ر	٠٠٠٠٥٣ر
٣	١٨٧٠٨	١٨٧٠٨	١	١	صفر

ومن الجدول يتضح أن أكبر فرق بين الاحتمال الفعلى المتجمع والاحتمال النظرى المتجمع هو ٠٠٠٩٦٢ر

وأن قيمة سميرنوف الجدولية (١٨٧٠٨، ٥٪) هى ٠٠٩٩٤٣ر .

وحيث أن قيمة سميرنوف المحسوبة أصغر من الجدولية فإننا نقبل الفرض القائل بأن هذه البيانات تتبع توزيع بواسون .

ملاحظة هامة : إستخدمنا فى الحالات السابقة طريقة العزوم لتقدير المعلمة المجهولة ، ويمكن إستخدام طريقة دالة الامكان الأعظم ونحصل على نفس القيم وذلك كما يلى :

حيث أن معدل تكرار الخسارة (المتوسط) باستخدام توزيع بواسون هو μ فإن :

إحتمال عدم حدوث أى خسارة خلال السنة : $ل(\text{صفر}) = \frac{هـ^{-\mu} \times \mu^{\text{صفر}}}{\lfloor \text{صفر}}$

إحتمال حدوث خسارة واحدة خلال السنة : $ل(١) = \frac{هـ^{-\mu} \times \mu^{١}}{\lfloor ١}$

إحتمال حدوث خسارتين خلال السنة : $ل(٢) = \frac{هـ^{-\mu} \times \mu^{٢}}{\lfloor ٢}$

إحتمال حدوث ثلاث خلال السنة : $ك(٣) = \frac{\text{هـ}^{-\mu} \times \mu^{٣}}{\underline{|٣}}$

وهكذا ...

∴ إحتمال (إمكانية) أن : ١٧٥٤٩ وثيقة لاتتعرض لأى خسارة

وأن : ١١٠٤ وثيقة تتعرض لخسارة واحدة .

وأن : ٥٣ وثيقة تتعرض لخسارتين .

وأن : ٢ وثيقة تتعرض لثلاث خسائر .

وأن : صفر وثيقة تتعرض لأربع خسائر.

وهذا الاحتمال ل = $\left[\frac{\text{هـ}^{-\mu} \times \mu^{\text{صفر}}}{\underline{|\text{صفر}}}\right]^{١٧٥٤٩} \times \left[\frac{\text{هـ}^{-\mu} \times \mu^{١}}{\underline{|١}}\right]^{١١٠٤}$

$\times \left[\frac{\text{هـ}^{-\mu} \times \mu^{٢}}{\underline{|٢}}\right]^{٥٣} \times \left[\frac{\text{هـ}^{-\mu} \times \mu^{٣}}{\underline{|٣}}\right]^{٢} \times \left[\frac{\text{هـ}^{-\mu} \times \mu^{٤}}{\underline{|٤}}\right]^{\text{صفر}}$

$= \frac{\text{هـ}^{-١٨٧٠٨\mu} \times \mu^{(\text{صفر} \times ١٧٥٤٩ + ١ \times ١١٠٤ + ٢ \times ٥٣ + ٣ \times ٢ + ٤ \times \text{صفر})}}{٢^{٥٣} \times ٣٦}$

$= \frac{\text{هـ}^{-١٨٧٠٨\mu} \times \mu^{١٢١٦}}{٤٢٫٠٢٣٩٨٧ \times ١٠^{١٣}}$

وطبقاً لطريقة الإمكان الأعظم يتم إختيار قيمة μ التى تعظم قيمة ل ويتم ذلك كما يلى:

بأخذ لوغاريتم الطرفين ينتج أن :

لو ل = $-١٨٧٠٨\ \mu + ١٢١٦$ لو $\mu - ٤٧٫٤٨٧٣٥٧$

وعند نقطة النهاية العظمى فإن المشتقة الأولى لهذه الدالة تساوى صفر ، أى أن

$$\frac{د لو ل}{د \mu} = -١٨٧٠٨ + \frac{١٢١٦}{\mu} = صفر .$$

$$\therefore \frac{١٢١٦}{\mu} = ١٨٧٠٨$$

$$\therefore \mu = \frac{١٢١٦}{١٨٧٠٨} = ٠٦٥ر٠ \text{ تقريباً}$$

وهى نفس النتيجة السابق التوصل إليها باستخدام طريقة العزوم .

مثال (٤) :

إختبر صحة الفرض القائل بأن البيانات الخاصة بالمثال السابق تخضع لتوزيع ذى الحدين السالب .

الحـــل:

تأخذ دالة كثافة الاحتمال لتوزيع ذى الحدين السالب الشكل التالى :

$$د(س) = \left(\frac{س + ر - ١}{س}\right) ل^{ر} (١ - ل)^{س}$$

حيث س هى متغير عشوائى يأخذ القيم الصحيحة : صفر ، ١ ، ٢، .... إلى ∞

، ر ، ل هما معلمتا التوزيع

، المتوسط $\mu = \frac{ر (١ - ل)}{ل}$

، التباين $\sigma^{٢} = \frac{ر (١ - ل)}{ل^{٢}}$

وهذا يعنى أننا نحتاج إلى حساب المتوسط $\bar{س}$ والتباين $ع^{٢}$ الفعليين ونساويهما بالمتوسط والتباين النظريين وبحل هاتين المعادلتين نحصل على قيمتى ر ، ل كما يلى :

جدول رقم ٨

عدد الخسائر س	عدد الوثائق ك	س ك	$س^{٢}$ ك
صفر	١٧٥٤٩	صفر	صفر
١	١١٠٤	١١٠٤	١١٠٤
٢	٥٣	١٠٦	٢١٢
٣	٢	٦	١٨
٤	صفر	صفر	صفر
المجموع	١٨٧٠٨	١٢١٦	١٣٣٤

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}^{٢}\text{ ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{١٢١٦}{١٨٧٠٨} = ٠٦٥\text{ر}$$

$$\text{ع}^{٢} = \frac{\text{مجـ س ك} - \dfrac{(\text{مجـ س ك})^{٢}}{\text{مجـ ك}}}{\text{مجـ (ك} - ١)}$$

$$\text{ع}^{٢} = \frac{١٣٣٤ - \dfrac{(١٢١٦)^{٢}}{١٨٧٠٨}}{١٨٧٠٧} = ٠٦٧١\text{ر}$$

وبمساواة المتوسط والتباين الفعليين بالمتوسط والتباين النظريين ينتج أن :

$$٠٫٦٥ = \frac{ر (١ - ل)}{ل} \qquad (١)$$

$$، ٠٫٦٧١ = \frac{ر (١ - ل)}{ل^٢} \qquad (٢)$$

وبقسمة المعادلة رقم (١) على المعادلة رقم (٢) ينتج أن :

$$\frac{\bar{س}}{ع^٢} = \frac{ر (١ - ل)}{ل} \times \frac{ل^٢}{ر (١ - ل)}$$

$$\frac{٠٫٦٥}{٠٫٦٧١} = ل \qquad \therefore ل = ٠٫٩٦٨٩$$

وبالتعويض فى معادلة (١) بقيمة ل :

$$٠٫٦٥ = \frac{ر (١ - ٠٫٩٦٨٩)}{٠٫٩٦٨٩}$$

$$\therefore ر = ٢٠٫٢٥$$

وحيث أن قيمتى ر ، ل بهما كسور فإنه يصعب إستخدام المعادلة السابقة الخاصة بكثافة الاحتمال إلا أنه توجد علاقة هامة يمكن من خلالها الحصول على الاحتمالات المختلفة وهى :

$$ك(صفر) = ل^ر$$

$$، ك(١) = ك(صفر) \times ر (١ - ل)$$

$$، ك(٢) = \frac{ك(١) (ر + ١) (١ - ل)}{٢}$$

$$\text{ك}(\text{٣})' = \frac{\text{ك}(\text{٢})\,(\text{ر} + \text{٢})\,(\text{١} - \text{ل})}{\text{٣}}$$

$$\text{ك}(\text{س})' = \frac{\text{ك}(\text{س} - \text{١})\,(\text{ر} + \text{ن} - \text{١})\,(\text{١} - \text{ل})}{\text{س}}$$

وبالتعويض بقيمة ل ، ر ، س فى هذه العلاقة نحصل على

$$\text{ك}(\text{صفر}) = (\text{ر٩٦٨٩})^{\text{٢ر٠٢٥}} = \text{ر٩٣٨٠٢٦}$$

$$\text{ك}(\text{١}) = \text{ر٩٣٨٠٢٦} \times \text{٢ر٠٢٥} \times \text{ر٠٣١١} = \text{ر٠٥٩٠٧٥} \,.$$

$$\text{ك}(\text{٢}) = \frac{\text{ر٠٥٩٠٧٥} \times \text{٣ر٠٢٥} \times \text{ر٠٣١١}}{\text{٢}} = \text{ر٠٠٢٧٧٩}$$

$$\text{ك}(\text{٣}) = \frac{\text{ر٠٠٢٧٧٩} \times \text{٤ر٠٢٥} \times \text{ر٠٣١١}}{\text{٣}} = \text{ر٠٠٠١١٦}$$

$$\text{ك}(\text{٤}) = \frac{\text{ر٠٠٠١١٦} \times \text{٥ر٠٢٥} \times \text{ر٠٣١١}}{\text{٤}} = \text{ر٠٠٠٠٠٤٥}$$

وبضرب الاحتمالات السابقة فى مجموع التكرارات وهو ١٨٧٠٨ نحصل على التكرارات النظرية المناظرة لكل فئة وهى :

عدد الخسائر	صفر	١	٢	٣	٤	المجموع
عدد الوثائق	١٧٥٤٩	١١٠٥	٥٢	٢	صفر	١٨٧٠٨

والجدول التالى يوضح التكرارات والاحتمالات الفعلية والنظرية المتجمعة واللازمة لحساب إختبار جودة التوفيق .

جدول رقم ٩ طريقة حساب إختبار كولوجروف سميرنوف لتوزيع ذى الحدين السالب

الفئة	التكرار الفعلى المتجمع	التكرار النظرى المتجمع	الاحتمال الفعلى المتجمع	الاحتمال النظرى المتجمع	الفرق
صفر	١٧٥٤٩	١٧٥٤٩	٩٣٨٠٤٨ر	٩٣٨٠٢٦ر	٠٠٠٠٢٢ر
١	١٨٦٥٣	١٨٦٥٤	٩٩٧٠٦٠ر	٩٩٧١٠١ر	٠٠٠٠٤١ر
٢	١٨٧٠٦	١٨٧٠٦	٩٩٩٨٩٣ر	٩٩٩٨٧٩ر	٠٠٠٠١٤ر
٣	١٨٧٠٨	١٨٧٠٨	١ر ـــــ	١ر ـــــ	ـــــ

ومن الجدول السابق يتضح أن أكبر فرق هو ٠٠٠٠٤١ر وحيث أن قيمة سميرنوف الجدولية هى :

$$(١٨٧٠٨ ، ٥٪) = \frac{١ر٣٦}{\sqrt{١٨٧٠٨}} = ٠٠٩٩٤٣ر$$

وحيث أن قيمة سميرنوف المحسوبة أصغر من الجدولية فإننا نقبل الفرض القائل بأن هذه البيانات تخضع لتوزيع ذى الحدين السالب .

أسئلة على الوحدة الدراسية الحادية عشرة

(١) فيما يلى بيان عن توزيع عينة من ١٠٠٠٠٠ وثيقة حريق حسب عدد الخسائر خلال السنة :

عدد الخسائر	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الوثائق	٨٨٥٨٥	١٠٥٧٧	٧٧٩	٥٤	٤	١

إختبر صحة الفرض القائل بأن :

أ- هذه البيانات تخضع لتوزيع ذى الحدين .

ب- هذه البيانات تخضع لتوزيع ذى الحدين السالب .

حـ- هذه البيانات تخضع لتوزيع بواسون .

(٢) فيما يلى بيان عن توزيع عينة من ٤٠٠٠ وثيقة سطو حسب عدد الخسائر خلال السنة .

عدد الخسائر	صفر	١	٢	٣
عدد الوثائق	٣٢٨٨	٦٤٢	٦٦	٤

إختبر صحة الفرض القائل بأن :

أ- هذه البيانات تخضع لتوزيع بواسون .

ب- هذه البيانات تخضع لتوزيع ذى الحدين السالب .

الوحدة الدراسية
الثانية عشرة
توفيق توزيع احتمالى نظرى مناسب للتوزيع الاحتمالى الفعلى لقيمة الخسارة واختيار جودة التوفيق

الوحدة الدراسية الثانية عشرة

موضوعها:

توفيق توزيع إحتمالى نظرى مناسب للتوزيع الاحتمالى الفعلى لقيمة الخسارة وإختبار جودة التوفيق

هدفها:

تعريف الدارس بكيفية توفيق توزيع إحتمالى نظرى مناسب للتوزيع الاحتمالى الفعلى لقيمة الخسارة والتأكد من ذلك من خلال إجراء إختبار جودة التوفيق.

عناصرها:

- إختبار صحة الفرض القائل بأن البيانات تخضع للتوزيع الطبيعى .
- إختبار صحة الفرض القائل بأن البيانات تخضع للتوزيع اللوغاريتمى الطبيعى .
- إختبار صحة الفرض القائل بأن البيانات تخضع للتوزيع الأسى السالب .
- إختبار صحة الفرض القائل بأن البيانات تخضع لتوزيع جاما .

تعرضنا فى الوحدة الدراسية السابقة لكيفية توفيق توزيع نظرى لتوزيع فعلى معلوم بالنسبة للبيانات المتعلقة بعدد الحوادث، ونوضح فيما يلى كيفية توفيق توزيع نظرى لتوزيع فعلى معلوم بالنسبة للبيانات المتعلقة بقيمة الخسارة .

مثال: فيما يلى بيان عن توزيع الخسائر بفرع السطو حسب قيمتها خلال عام ١٩٩٠ فى إحدى شركات التأمين المصرية :

فئة الخسائر	عدد الخسائر
صفر -	٥٠٤
٢٠٠٠ -	٣٥٢
٤٠٠٠ -	١٨٦
٦٠٠٠ -	٩١
٨٠٠٠ -	٤٤
١٠٠٠٠ -	٢٠
١٢٠٠٠ -	١٠
١٤٠٠٠ -	٤
١٦٠٠٠ -	٣
١٨٠٠٠ -	١
٢٠٠٠٠ - ٢٢٠٠٠	١

المطلوب:

أ - إختبار صحة الفرض القائل بأن هذه البيانات تخضع للتوزيع الطبيعى

ب- إختبار صحة الفرض القائل بأن هذه البيانات تخضع للتوزيع اللوغاريتمى الطبيعى .

جـ- إختبار صحة الفرض القائل بأن هذه البيانات الأسى السالب

د- إختبار صحة الفرض القائل بأن هذه البيانات تخضع لتوزيع جاما

الحل:

أ- إختبار صحة الفرض القائل بأن هذه البيانات تخضع للتوزيع الطبيعي:

حيث أن دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعى دالة فى معلمتين هما المتوسط μ، التباين σ^2 فإنه لابد من تقديرهما من بيانات العينة وذلك على النحو التالى :

جدول رقم (١) يوضح خطوات حساب المتوسط والانحراف المعيارى لتوزيع قيمة الخسائر :

الفئة	التكرار	مركز الفئة س	س ك	س٢ ك
صفر -	٥٠٤	١٠٠٠	٥٠٤٠٠٠	٥٠٤×١٠^٦
٢٠٠٠ -	٣٥٢	٣٠٠٠	١٠٥٦٠٠٠	٣١٦٨× ١٠^٦
٤٠٠٠ -	١٨٦	٥٠٠٠	٩٣٠٠٠٠	٤٦٥٠×١٠^٦
٦٠٠٠ -	٩١	٧٠٠٠	٦٣٧٠٠٠	٤٤٥٩ ×١٠^٦
٨٠٠٠ -	٤٤	٩٠٠٠	٣٩٦٠٠٠	٣٥٦٤ ×١٠^٦
١٠٠٠٠ -	٢٠	١١٠٠٠	٢٢٠٠٠٠	٢٤٢٠ ×١٠^٦
١٢٠٠٠ -	١٠	١٣٠٠٠	١٣٠٠٠٠	١٦٩٠ × ١٠^٦
١٤٠٠٠ -	٤	١٥٠٠٠	٦٠٠٠٠	٩٠٠ ×١٠^٦
١٦٠٠٠ -	٣	١٧٠٠٠	٥١٠٠٠	٨٦٧ ×١٠^٦
١٨٠٠٠-	١	١٩٠٠٠	١٩٠٠٠	٣٦١ ×١٠^٦
٢٠٠٠٠- ٢٢٠٠٠	١	٢١٠٠٠	٢١٠٠٠	٤٤١ ×١٠^٦
المجموع	١٢١٦		٤٠٢٤٠٠٠	٢٣٠٢٤ × ١٠^٦

$$\therefore \bar{س} = \frac{مجـ س ك}{مجـ ك} = \frac{٤٠٢٤٠٠٠}{١٢١٦} = ٣٣٠٩٫٢١١$$

$$، ع^٢ = \frac{مجـ س^٢ ك - \frac{(مجـ س ك)^٢}{مجـ ك}}{مجـ (ك - ١)}$$

$$= \frac{٢٣٠٢٤ \times ١٠^٦ - \frac{(٤٠٢٤٠٠٠)^٢}{١٢١٦}}{١٢١٥} = ٧٩٨٩٩٠٧$$

$$\therefore ع = ٢٨٢٦٫٦٤٢$$

وحيث أن المتغير العشوائى ى = $\frac{س - \mu}{\sigma}$ يتوزع توزيعا طبيعيا معياريا ويمساواة المتوسط والانحراف المعيارى النظريين بالمتوسط والانحراف المعيارى الفعليين ينتج

أن ى = $\frac{س - \bar{س}}{ع}$ تتوزع توزيعا طبيعياً معيارياً

وبالتعويض عن س بالحد الاعلى للفئات ، س = ٣٣٠٩.٢١١ ، ع = ٢٨٢٦٫٦٤٢نحصل على:

جدول رقم ٢ الاحتمال التجميعي والتكرار النظرى للتوزيع الطبيعى

الحد الاعلى للفئات	ى	الاحتمال التجميعى	التكرار التجميعى	التكرار
٢٠٠٠	-٠,٤٦	٠,٣٢٢٧٦	٣٩٣	٣٩٣
٤٠٠٠	٠,٢٤	٠,٥٩٤٨٣	٧٢٣	٣٣٠
٦٠٠٠	٠,٩٥	٠,٨٢٨٩٤	١٠٠٨	٢٨٥
٨٠٠٠	١,٦٦	٠,٩٥١٥٤	١١٥٧	١٤٩
١٠٠٠٠	٢,٣٧	٠,٩٩١١١	١٢٠٥	٤٨
١٢٠٠٠	٣,٠٧	٠,٩٩٨٩٣	١٢١٥	١٠
١٤٠٠٠	٣,٧٨	٠,٩٩٩٩٢	١٢١٦	١
١٦٠٠٠	٤,٤٩	٠,٩٩٩٩٧	١٢١٦	صفر
١٨٠٠٠	٥,٢	٠,٩٩٩٩٧	١٢١٦	صفر
٢٠٠٠٠	٥,٩	٠,٩٩٩٩٧	١٢١٦	صفر
٢٢٠٠٠	٦,٦١	٠,٩٩٩٩٧	١٢١٦	صفر
المجموع				١٢١٦

اختبار سمير نوف كلموجروف : يتم مقارنة الفرق بين الاحتمالات التجميعية الفعلية والنظرية وتحديد اكبر فرق ومقارنته بقيمة سميرنوف الجدولية كما يلى :

جدول رقم ٣ اختيار سمير نوف للتوزيع الطبيعى

الفئة	التكرار الفعلى	التكرار التجيعى الفعلى	الاحتمال التجميعى الفعلى	الاحتمال التجميعى النظرى	الفرق
صفر –	٥٠٤	٥٠٤	٠.٤١٤٤٧	٠.٣٢٢٧٦	٠.٠٩١٧١
٢٠٠٠ –	٣٥٢	٨٥٦	٠.٧٠٢٩٥	٠.٥٩٤٨٣	٠.١٠٩١٢
٤٠٠ –	١٨٦	١٠٤٢	٠ ٨٥٦٩١	٠ ٨٢٨٩٤	٠.٠٢٧٩٧
٦٠٠٠ –	٩١	١١٣٣	٠.٩٣١٧٤	٠ ٩٥١٥٤	٠.٠١٩٨
٨٠٠٠ –	٤٤	١١٧٧	٠.٩٦٧٩٣	٠ ٩٩١١١	٠.٠٢٣١٨
١٠٠٠٠ –	٢٠	١١٩٧	٠.٩٨٤٢٨	٠.٩٩٨٩٣	٠.٠١٤٥٥
١٢٠٠٠ –	١٠	١٢٠٧	٠.٩٩٢٦٠	٠.٩٩٩٩٢	٠.٠٠٧٣٢
١٤٠٠٠ –	٤	١٢١١	٠.٩٩٥٨٩	٠ ٩٩٩٩٧	٠.٠٠٤٠٨
١٦٠٠٠ –	٣	١٢١٤	٠.٩٩٨٣٦	٠.٩٩٩٩٧	٠.٠٠١٦١
١٨٠٠٠ –	١	١٢١٥	٠.٩٩٩١٨	٠.٩٩٩٩٧	٠.٠٠٠٧٩
٢٠٠٠٠ – ٢٢٠٠٠	١	١٢١٦	١	٠.٩٩٩٩٧	٠ ٠٠٠٠٣

و من البيانات السابقة يتضح أن اكبر قيمة للفرق هى ١٠٩١٢ر وبمقارنة هذه القيمة المحسوبة بقيمة سمير نوف الجدولية (١٢١٦ ، ٥٪) = $\frac{١٫٣٦}{\sqrt{١٢١٦}}$ ٠.٠٣٩

نجد أن القيمة المحسوبة اكبر من الجدولية وبالتالى فإننا نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل أى أن البيانات لا تخضع للتوزيع الطبيعى

ب– إختبار صحة الفرض القائل بأن هذه البيانات تخضع للتوزيع اللوغاريتمى الطبيعى:

∴ المتغير ي = $\frac{\text{لو س} - \mu}{\sigma}$ يتوزع توزيعاً طبيعياً (حيث س الحد الاعلى للفئات) وبالتالى يمكن إستخدام جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعى فى إيجاد قيمتها و حيث أن المتغير ي يعتمد على معلمتين هى μ ، σ فإنه يتم حسابهما أولاً

باستخدام معادلتى المتوسط والتباين الخاصتين بالتوزيع اللوغاريتمى الطبيعى كما يلى:

∴ المتوسط = هـ $^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^{2}}$

، التباين = هـ$^{(2\mu + \sigma^{2})}$ × (هـ$^{\sigma^{2}}$ − ١)

وبمساواة المتوسط والتباين النظريين بالمتوسط والتباين الفعليين ينتج أن :

٣٣٠٩ر٢١١ = هـ $^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^{2}}$ (١)

، ٧٩٨٩٩٠٧٠ = هـ $^{(2\mu + \sigma^{2})}$ × (هـ$^{\sigma^{2}}$ − ١) (٢)

وبقسمة المعادلة الثانية على مربع المعادلة الاولى ينتج أن :

٠ر٧٢٩٦١٣٦ = هـ$^{\sigma^{2}}$ − ١

١ر٧٢٩٦١٣٦ = هـ$^{\sigma^{2}}$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين للاساس هـ ينتج أن:

σ^{2} = ٠ر٥٤٧٨٩٨٠٢٣

∴ σ = ٠ر٧٤٠٢٠١٣٤٤ وبالتعويض بقيمة σ فى معادلة المتوسط ينتج أن :

٣٣٠٩ر٢١١ = هـ$^{\mu + ٢٧٣٩٤٩٠١٤}$، وبأخذ لوغاريتم الطرفين للاساس هـ ينتج أن:

٨ر١٠٤٤٦٤ = μ + ٠ر٢٧٣٩٤٩٠١٤

∴ μ = ٧ر٨٣٠٥١٥٨٨٦

وبالتعويض عن س بالحد الاعلى للفئات فى الدالة ى = $\frac{\text{لو س} - \mu}{\sigma}$

ثم بالكشف فى جدول التوزيع الطبيعى نحصل على البيانات التالية:

جدول رقم (٤) التوزيع النظرى لقيمة الخسارة باستخدام التوزيع اللوغاريتمى الطبيعى

الفئة	لوغاريتم الحد الاعلى للفئة	ى	الاحتمال النظرى التجميعى	التكرار النظرى التجميعى	التكرار النظرى
صفر-	٧٫٦٠٠٩	-٠٫٣١	٫٣٧٨٢٨	٤٦٠	٤٦٠
-٢٠٠٠	٨٫٢٩٤٠	٠٫٦٣	٫٧٢٥٦٥	٨٩٥	٤٣٥
-٤٠٠٠	٨٫٦٩٩٥	١٫١٧	٠٫٨٧٩	١٠٦٩	١٧٤
-٦٠٠٠	٨٫٩٨٧٢	١٫٥٦	٠٫٩٤٠٦٢	١١٤٤	٧٥
-٨٠٠٠	٩٫٢١٠٣	١٫٨٦	٠٫٩٦٨٥٦	١١٧٨	٣٤
-١٠٠٠٠	٩٫٣٩٣٧	٢٫١١	٠٫٩٨٢٥٧	١١٩٥	١٧
-١٢٠٠٠	٩٫٥٤٦٨	٢٫٣٢	٠٫٩٨٩٨٣	١٢٠٤	٩
-١٤٠٠٠	٩٫٦٨٠٣	٢٫٥٠	٠٫٩٩٣٧٩	١٢٠٨	٤
-١٦٠٠٠	٩٫٧٩٨١	٢٫٦٦	٠٫٩٩٦٠٩	١٢١١	٣
-١٨٠٠٠	٩٫٩٠٢٥	٢٫٨٠	٠٫٩٩٧٤٤	١٢١٣	٢
-٢٠٠٠٠	٩٫٩٩٨٨	٢٫٩٣	٠٫٩٩٨٣١	١٢١٤	١
-٢٢٠٠٠	١٠٫٠٨٥٨	٣٫٠٥	٠٫٩٩٨٨٦	١٢١٥	١
٢٤٠٠٠	١٠٫١٦٥٩	٣٫١٦	٠٫٩٩٩٢١	١٢١٥	صفر
٢٦٠٠٠	١٠٫٢٤٠٠	٣٫٢٦	٠٫٩٩٩٤٤	١٢١٥	صفر
٢٨٠٠٠ - ٣٠٠٠٠	١٠٫٣٠٩٠	٣٫٣٥	٠٫٩٩٩٦٠	١٢١٦	١

وفيما يلى يتم إختبار ما إذا كانت البيانات الفعلية لتوزيع قيمة الخسارة تخضع للتوزيع اللوغاريتمى الطبيعى أم لا وذلك باستخدام إختبار كا^{2}:

جدول رقم (٥) اختبار كا^{٢} للتوزيع اللوغارتمى الطبيعى

الفئة	التكرار الفعلى	التكرار النظرى	كا^{٢} المحسوبة
صفر –	٥٠٤	٤٦٠	٤.٢٠٩
٢٠٠٠ –	٣٥٢	٤٣٥	١٥.٨٢٨
٤٠٠٠ –	١٨٦	١٧٤	،٨٢٨
٦٠٠٠ –	٩١	٧٥	٣.٤١٣
٨٠٠٠ –	٤٤	٣٤	٢.٩٤١
١٠٠٠٠ –	٢٠	١٧	٠.٥٢٩
١٢٠٠٠ –	١٠	٩	٠.١١١
١٤٠٠٠ –	٤	٤	
١٦٠٠٠ –	٣	٣	
١٨٠٠٠ –	١	٢	
٢٠٠٠٠ –	١] ٩	–] ١٢	٠.٧٥٠ *
٢٢٠٠٠ –	صفر	١	
٢٤٠٠٠ –	صفر	صفر	
٢٦٠٠٠ –	صفر	صفر	
٢٨٠٠٠ – ٣٠٠٠٠	صفر	١	
المجموع	١٢١٦	١٢١٦	٢٨.٦١٨

* ملاحظة: تم دمج الفئات من ١٤٠٠٠ – ٣٠٠٠٠ لأن التكرار أمام أى فئة منها أقل من ٥ مع خصم درجة حرية أخرى مقابل عملية الدمج

كا^{٢} الجدولية (٦ ، ٥ ٪) = ١٢ر٥٩

وحيث أن كا^{٢} المحسوبة اكبر من الجدولية فإنه يوجد فرق معنوى وبالتالى فإن البيانات لا تخضع للتوزيع اللوغاريتمى الطبيعى.

جـ- اختبار صحة الفرض القائل بأن البيانات تخضع للتوزيع الأسى السالب:

تأخذ دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الاسى السالب الشكل التالى:

$$ك(س) = ى هـ^{-ى س} \quad ، س \geq صفر$$

والمتوسط = $\frac{١}{ى}$ ، والتباين = $\frac{١}{ى^٢}$

كما تأخذ دالة التوزيع (دالة الاحتمال التجميعية) الشكل التالى :

$$د(س) = ١ - هـ^{-ى س}$$

ومن بيانات التوزيع الفعلي وجدنا أن $\bar{س}$ = ٢١١ر٣٣٠٩

وبمساواه المتوسط الفعلى بالمتوسط النظرى (لأن التوزيع ذى معلمة وحيدة) ينتج أن.

$$\frac{١}{ى} = ٣٣٠٩.٢١١$$

$$\therefore ى = ٠ر٠٠٠٣٠٢$$

وبالتعويض عن س بالحد الاعلى للفئات فى دالة التوزيع نحصل على التوزيع النظرى التالى:

جدول رقم (٦) التوزيع النظرى لقيمة الخسارة باستخدام التوزيع الاسى السالب وإختبار كا٢

الفئة	ى س	الاحتمال النظرى التجميعى	التكرار النظرى التجميعى	التكرار النظرى	التكرار الفعلى	كا٢
صفر -	٠ر٦٠٤٣٨	٠ر٤٥٣٥٨٧	٥٥٢	٥٥٢	٥٠٤	٤ر١٧٤
٢٠٠٠ -	١ر٢٠٨٧٦	٠ر٧٠١٤٢٣	٨٥٣	٣٠١	٣٥٢	٨ر٦٤١
٤٠٠٠ -	١ر٨١٣١٤	٠ر٨٣٦٨٥٩	١٠١٨	١٦٥	١٨٦	٢ر٦٧٣
٦٠٠٠ -	٢ر٤١٧٥٢	٠ر٩١٠٨٥٨	١١٠٨	٩٠	٩١	٠ر٠١١
٨٠٠٠ -	٣ر٠٢١٩	٠ر٩٥١٢٩١	١١٥٧	٤٩	٤٤	٠ر٥١
١٠٠٠٠ -	٣ر٦٢٨٢٨	٠ر٩٧٣٤٣٨	١١٨٤	٢٧	٢٠	١ر٨١٥
١٢٠٠٠ -	٤ر٢٣٠٦٦	٠ر٩٨٥٤٥٧	١١٩٨	١٤	١٠	١ر١٤٣
١٤٠٠٠ -	٤ر٨٣٥٠٤	٠ر٩٩٢٠٥٤	١٢٠٦	٨	٤	
١٦٠٠٠ -	٥ر٤٣٩٤٢	٠ر٩٩٥٦٥٨	١٢١١	٥	٣	
١٨٠٠٠ -	٦ر٠٤٣	٠ر٩٩٧٦٢٦	١٢١٣	٢ (١٨)	١ (١٠)	×٣ر٥٥٦
٢٠٠٠٠ -	٦ر٦٤٨١٨	٠ر٩٩٨٧٠٤	١٢١٤	١	١	
٢٢٠٠٠ -	٧ر٥٢٥٦	٠ر٩٩٩٢٩٢	١٢١٥	١	صفر	
٢٤٠٠٠ - ٢٦٠٠٠	٧ر٨٥٦٩٤	٠ر٩٩٩٦١١	١٢١٦	١	صفر	
المجموع				١٢١٦	١٢١٦	٢٢ر٥٢٣

*ملاحظة: تم دمج الفئات من ١٤٠٠٠ – ٢٦٠٠٠ لأن التكرار أمام أى فئة منها أقل من ٥

∴ كا٢ الجدولية (٦ ، ٥٪) = ١٢.٥٩

و حيث أن كا٢ المحسوبة اكبر من الجدولية فإنه يوجد فرق معنوى وبالتالى فإن البيانات لا تخضع للتوزيع الأسى السالب .

٤- إختبار صحة الفرض القائل بأن البيانات تخضع لتوزيع جاما .

تأخذ دالة التوزيع لتوزيع جاما الشكل التالى :

$$\text{د (س)} = \int_{\text{صفر}}^{\text{س}} \frac{B}{\lfloor \text{ى}} \; \text{هـ}^{-B\,\text{س}} \; (B\,\text{س})^{\text{ى}-1} \; \text{ء س}$$

$$\text{والمتوسط} = \frac{\text{ى}}{B} \quad \text{والتباين} = \frac{\text{ى}}{B^{2}}$$

وبمساواة المتوسط والتباين النظريين بالمتوسط والتباين الفعليين :

$$\therefore \; ٣٣٠٩٫٢١١ = \frac{\text{ى}}{B} \qquad (١)$$

$$\text{،} \; ٧٩٨٩٩٠٧ = \frac{\text{ى}}{B^{2}} \qquad (٢)$$

وبقسمة معادلة (١) على معادلة (٢) ينتج أن:

$$\frac{٣٣٠٩٫٢١١}{٧٩٨٩٩٠٧} = \frac{\text{ى}}{B} \times \frac{B^{2}}{\text{ى}}$$

$$\therefore \; B = ٠٫٠٠٠٤١٤$$

وبالتعويض بقيمة B فى معادلة (١)

$$٣٣٠٩٫٢١١ = \frac{\text{ى}}{٠٫٠٠٠٤١٤}$$

$$\therefore \; \text{ى} = ١٫٣٧٠٥٨٨$$

$$\therefore \; \text{د (س)} = \int_{\text{صفر}} \frac{٠٫٠٠٠٤١٤}{\lfloor ١٫٣٧٠٥٨٨} \; \text{هـ}^{-٠٫٠٠٠٤١٤\,\text{س}} \; (٠٫٠٠٠٤١٤\,\text{س})^{٠٫٣٧٠٥٨٨} \; \text{ء س}$$

وبالتعويض عن س بالحد الاعلى للفئات فى هذه الدالة وبإيجاد تكامل هذه الدالة بالطريقة التقريبية السابق إستخدامها عند دراسة توزيع جاما فى الوحدة العاشرة نحصل على النتائج التالية :

جدول رقم (٧) التوزيع النظرى لقيمة الخسارة باستخدام توزيع جاما واختبار كا^{٢}

الفئة	ع (س)	ص (ع (س)) (الاحتمال النظرى)	التكرار النظرى التجميعى	التكرار النظرى	التكرار الفعلى	كا٢
صفر –	-٢٥٧٩٨٤ر٠	٣٩٨٢٣ر٠	٤٨٤	٤٨٤	٥٠٤	٠.٨٢٦
٢٠٠٠ –	٥١٣٨٣٨ر٠	٦٩٦٥٤٨ر٠	٨٤٧	٣٦٣	٣٥٢	٠.٣٣٣
٤٠٠٠ –	١ر٠٥٥٢٥٦	٨٥٤١١٣ر٠	١٠٣٩	١٩٢	١٨٦	٠.١٨٨
٦٠٠٠ –	١ر٤٨٦٢٧٧	٩٣١٤٦٢ر٠	١١٣٣	٩٤	٩١	٠.٠٩٦
٨٠٠٠ –	١ر٨٥٠٢٥٧	٩٦٨٩٣ر٠	١١٧٧	٤٤	٤٤	صفر
١٠٠٠٠ –	٢ر١٦٨٤١٨	٩٨٥٠٢٣ر٠	١١٩٨	٢١	٢٠	٠.٠٤٨
١٢٠٠٠ –	٢ر٤٥٢٩٢٤	٩٩٢٨١٢ر٠	١٢٠٧	٩	١٠	٠.١١١
١٤٠٠٠ –	٢ر٧١١٤٧٠	٩٩٦٤٤٢ر٠	١٢١٢	٥	٤	
١٦٠٠٠ –	٢ر٩٤٩٢٧٦	٩٩٨١٧٤ر٠	١٢١٤	٢ (٩)	٣ (٩)	صفرx
١٨٠٠٠ –	٣ر١٧٠٠٥٧	٩٩٩٠٣١ر٠	١٢١٥	١	١	
٢٠٠٠٠ –	٣ر٣٧٦٥٦٩	٩٩٩٤٦٥ر٠	١٢١٥	صفر	١	
٢٢٠٠٠– ٢٤٠٠٠	٣ر٥٧٠٩١٥	٩٩٩٦٩٥ر٠	١٢١٦	١	صفر	
المجموع				١٢١٦		١ر٦٠٢

*ملاحظة: تم دمج الفئات من ١٤٠٠٠ – ٢٤٠٠٠ لأن التكرار أمام أى فئة أقل من ٥ .

∴ كا^{2} الجدولية (٦، ٥٪) = ١٢.٥٩

وحيث أن كا^{2} المحسوبة أصغر من الجدولية

∴ لا يوجد فرق معنوى وبالتالى فإننا نقبل الفرض القائل بأن هذه البيانات تتبع توزيع جاما .

أسئلة على الوحدة الثانية عشرة

(١) فيما يلى توزيع عينة من ١٠٠٠ وثيقة تأمين سيارات حسب قيمة الخسارة:

فئة الخسارة	صفر –	٤٠٠٠ –	٨٠٠٠ –	١٢٠٠٠–	١٦٠٠٠–	٢٠٠٠ –	٢٤٠٠٠–	٢٨٠٠٠–	٣٢٠٠٠ – ٣٦٠٠٠
عدد الوثائق	٢٠	٢٤٠	٢٢٠	٢١٠	١٠٠	٦٠	٣٠	١٠	١٠

إختبر صحة الفرض القائل بأن هذه البيانات تتبع التوزيع اللوغاريتمى الطبيعى

(٢) فيما يلى توزيع عينة من ١١٦٠ وثيقة سيارات حسب قيمة الخسارة:

فئة الخسارة	صفر	٤٠٠٠	٨٠٠٠	١٢٠٠٠	١٦٠٠٠	٢٠٠٠٠	٢٤٠٠٠	٢٨٠٠٠	٣٢٠٠٠–٣٦٠٠٠
عدد الوثائق	٥١١	٣٤١	١٧٠	٨٠	٣٥	١٤	٦	٢	١

إختبر صحة الفرض القائل بأن :

أ– هذه البيانات تتبع التوزيع الأسى السالب .

ب– هذه البيانات تتبع توزيع جاما .

جـ– هذه البيانات تتبع توزيع باريتو .

الوحدة الدراسية
الثالثة عشرة
قياس الخطر

الوحدة الدراسية الثالثة عشرة

موضوعها : قياس الخطر

هدفها : كيفية قياس الخطر من خلال تحديد الانحراف المعيارى للتوزيع الاحتمالى.

عناصرها:-

- علاقة الخطر بعدد النتائج .
- الأداة الاحصائية المستخدمة فى قياس الخطر .
- أهمية تحديد الانحراف المعيارى للتوزيع الاحتمالى .

علاقة الخطر بعدد النتائج :

يعرف الخطر بأنه" الخوف من تجاوز الخسائر المادية الفعلية عن الخسائر المتوقعة نتيجة حادث مفاجيء" ويقصد بتجاوز الخسائر المادية الفعلية عن الخسائر المتوقعة التباين او الانحراف الموجب للخسائر الفعلية عن الخسائر المتوقعة ، وبمعنى آخر فإن الخطر يتمثل فى الخوف من أن تزيد الخسائر الفعلية عن الخسائر المتوقعة ، وبناء على ذلك اذا كان هناك خطر يترتب عليه نتيجة واحدة فإن الانحراف فى النتائج يساوى صفر وبالتالى لا يوجد خطر ، اما إذا كان هناك خطر يترتب عليه عدة نتائج ولكل نتيجة أحتمال معين فإننا لا نستطيع أن نحدد أى من هذه النتائج سوف تتحقق ، وقد يقدر مدير الخطر قيمة معينة للخسائر وتحدث خسارة بقيمة اكبر منها وهذا يعنى انه كلما زاد عدد النتائج الممكنه مع صعوبة تحديد أى من هذه النتائج سوف تتحقق كلما زادت قيمة الخطر ، وفى حالة ثالثة اذا كان هناك خطر يترتب عليه نتائج محدودة ويمكن التنبؤ بها بدرجة ثقة عالية فإن هذا يترتب عليه إنخفاض قيمة الخطر .

كما يضاف الى ما سبق انه قد يتوافر لدينا عدة توزيعات إحتمالية للخسارة تتساوى فيها القيمة المتوقعة (المتوسط) ومع هذا فإنها تختلف فى قيمة الخطر ، ولتوضيح ذلك تأخذ فى الاعتبار المثال التالى :

مثال(١)

عرض عليك ٣ انواع من السيارات قيمة كل منها ٥٠٠٠ جنية و فيما يلى التوزيع الاحتمالى للخسائر السنوية لكل سيارة :

جدول (١) التوزيع الاحتمالى الأول

قيمة الخسارة	الاحتمال
١٥٠٠	١ر٠٠
المجموع	١ر٠٠

جدول (٢) التوزيع الاحتمالى الثانى

قيمة الخسارة	الاحتمال
٥٠٠	٠٢٥ر
١٥٠٠	٩٥ر
٢٥٠٠	٠٢٥ر
المجموع	١ر٠٠

جدول (٣) التوزيع الاحتمالى الثالث

قيمة الخسارة	الاحتمال
صفر	٣٠ر
١٠٠٠	٢٥ر
٢٠٠٠	٢٠ر
٣٠٠٠	١٥ر
٤٠٠٠	١٠ر
المجموع	١ر٠٠

حدد أى السيارات أفضل

الحل :

بحساب متوسط الخسارة المتوقعة للتوزيعات الاحتمالية الثلاثة نجد أن :

متوسط الخسارة المتوقعة فى التوزيع الأول= ١٥٠٠ × ١ = ١٥٠٠ جنيه

متوسط الخسارة المتوقعة فى التوزيع الثانى= ٥٠٠ × ٠٢٥ر+ ١٥٠٠ × ٩٥ر+٢٥٠٠ × ٠٢٥ر

= ١٢,٥ + ١٤٢٥ + ٦٢,٥ = ١٥٠٠ جنيه

متوسط الخسارة المتوقعة فى التوزيع الثالث = صفر × ٣٠ر + ١٠٠٠ × ٢٥ر + ٢٠٠٠ ×٢٠ر+ ٣٠٠٠ × ١٥ر + ٤٠٠٠ × ١٠ر

= صفر+٢٥٠ +٤٠٠ +٤٥٠ +٤٠٠ = ١٥٠٠ جنيه

وهذا يعنى ان التوزيعات الثلاثة متوسط الخسارة المتوقعة فيها متساو تماما ، ومع هذا فإنه بالنظر إلى قيم الخسائر وإحتمالاتها فى التوزيعات الثلاثة نجد أن :

بالنسبة للتوزيع الأول فأن احتمال حدوث خسارة قيمتها صفر (وهو يمثل إحتمال عدم حدوث خسارة) قيمته صفر وبالتالى فإن إحتمال حدوث الحادث يساوى واحد صحيح وقيمة الخسارة ١٥٠٠ جنيه وهذا يعنى أن قيمة الخسارة ثابتة من سنة لأخرى وليس هناك انحراف فيها وبالتالى فإنه لا يوجد خطر (قيمة الخطر تساوى صفر) حيث تصبح قيمة الخسارة السنوية فى حكم مصروفات التشغيل .

وبالنسبة للتوزيع الثانى فإنه توجد ٣ حالات أو نتائج وتوجد نتيجة واحدة إحتمالها ٩٥٪ وهى التى يترتب عليها خسارة قيمتها ١٥٠٠ اما النتيجة الأولى والثالثة فإن إحتمال كل منهما ٢,٥٪ وهذا يعنى أنه يمكن التنبؤ بأى من النتائج سوف تتحقق وبمعنى أدق فإن يمكن بدرجة ثقة كبيرة تقدير مدى محدود (حد أدنى وحد أقصى) يمكن أن تقع فيه الخسارة أو الخسائر التى ستحدث فى العام القادم (وذلك لأن هناك نتيجة إحتمالها كبير جدا بالإضافة إلى أن الخسائر تأخذ مدى محدود يتراوح بين ٥٠٠ ، ٢٥٠٠) جنيه وهذا يعنى أ ن الأنحراف فى النتائج الممكنة (الخطر) موجود ولكنه محدود. وبالنسبة للتوزيع الثالث فإنه توجد ٥ حالات أو نتائج ممكنة وإحتمال حدوث أى نتيجة من هذه النتائج يساوى ١٠٪ على الأقل وبالتالى يصعب تغليب حدوث حالة معينة ، يضاف إلى ذلك أن النتائج المختلفة تأخذ مدى أكبر من حالة التوزيع الأحتمال الثانى وهذا المدى يتراوح بين صفر ، ٤٠٠٠ جنيه وفى هذه الحالة يصعب التنبؤ بأى من النتائج سوف تتحقق وهذا يعنى أن الانحراف فى النتائج الممكنة (الخطر) موجود ولكن بدرجة اكبر من الخطر الموجود فى التوزيع الثانى .

الأداة الاحصائية المستخدمة فى قياس الخطر :

نخلص مما سبق أن العلاقة بين الخطر والتوزيع الاحتمالى للخسائر تتمثل فى أن الخطر يعتبر تمييزا للتوزيع الأحتمالى ، ولكن عند إدارة الخطر فإننا نحتاج إلى أداة إحصائية yardstick تستخدم فى قياس المدى الذى يمكن أن تنحرف فيه الخسائر الفعلية عن الخسائر المتوقعة فى الأجل الطويل ، وبمعنى آخر فإننا نحتاج إلى أداة لقياس

الخطر وهناك العديد من الأدوات الاحصائية التى تقيس إنتشار القيم حول المتوسط ومن أهم هذه المقاييس واكثرها إستخداما الانحراف المعيارى Standard deviation وهو عبارة عن" الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات إنحرافات القيم عن متوسطها الحسابى " وفى حالة التوزيعات الاحتمالية فإن الانحراف المعيارى يكون عبارة عن " الجذر التربيعى الموجب لمجموع حاصل ضرب مربعات إنحرافات القيم عن متوسطها الحسابى فى إحتمالاتها " ، وفيما يلى نوضح خطوات حساب الانحراف المعيارى من التوزيعات الأحتمالية :

١- حساب متوسط قيم الخسائر (وهو عبارة عن مجموع حاصل ضرب مراكز فئات الخسارة فى إحتمالاتها)

٢- طرح متوسط الخسائر من جميع مراكز فئات الخسائر (يسمى الناتج بأنحراف القيم عن وسطها)

٣- تربيع إنحرافات القيم عن وسطها .

٤- ضرب مربع إنحرافات القيم عن وسطها فى الاحتمال المناظر وإيجاد المجموع (الناتج يسمى التباين Variance) .

٥- إيجاد الجذر التربيعى للتباين فنحصل على الانحراف المعيارى .

∴ الانحراف المعيارى $\sigma = \sqrt{\text{مجـ}[(\text{س} - \bar{\text{س}})^2 \times \text{ح (س)}]}$

حيث : σ الانحراف المعيارى (جذر التباين σ^2) ، س قيم الخسائر (مراكز الفئات) ، $\bar{\text{س}}$ متوسط قيم الخسائر ، ح (س) إحتمال حدوث كل خسارة .

وفيما يلى يتم حساب الانحراف المعيارى للتوزيعات الإحتمالية الثلاثة السابقة :

التوزيع الاحتمالي الأول:

جدول رقم (٤) حساب الانحراف المعياري

قيمة الخسارة س	الاحتمال ح (س)	الخسارة x الاحتمال س × ح(س)	الخسارة–المتوسط س- س̄	(الخسارة-المتوسط)^2 (س-س̄)^2	(الخسارة–المتوسط)^2 × الاحتمال (س–س̄)^2 × ح (س)
١٥٠٠	١,٠٠	١٥٠٠	١٥٠٠–١٥٠٠ = صفر	صفر	صفر ×١= صفر
المجموع	١,٠٠	س̄=١٥٠٠			التباين σ^2 = صفر ∴ الانحراف σ=صفر

التوزيع الاحتمال الثاني

جدول رقم (٥) حساب الانحراف المعياري

قيمة الخسارة س	الاحتمال ح (س)	الخسارة x الاحتمال س × ح(س)	الخسارة- المتوسط س– س	(الخسارة–المتوسط)^2 (س –س)^2	(الخسارة–المتوسط)^2 × الاحتمال (س–س̄)^2 × ح (س)
٥٠٠ ١٥٠٠ ٢٥٠٠	٠٢٥ر ٩٥ر ٠٢٥ر	١٢,٥ ١٤٢٥ ٦٢.٥	١٠٠٠ – صفر ١٠٠٠	١٠٠٠٠٠٠ صفر ١٠٠٠٠٠٠	٢٥٠٠٠ صفر ٢٥٠٠٠
المجموع	١.٠٠	س̄=١٥٠٠			التباين σ^2 = ٥٠٠٠٠ الانحراف σ = ٢٢٣ر٦٠٧

التوزيع الاحتمالى الثالث

جدول رقم (٦) حساب الانحراف المعيارى

قيمة الخسارة س	الاحتمال ح (س)	الخسارة × الاحتمال س × ح(س)	الخسارة- المتوسط س− $\bar{س}$	(الخسارة -المتوسط)٢ (س −$\bar{س}$)٢	(الخسارة-المتوسط)٢ × الاحتمال (س−$\bar{س}$)٢ × ح (س)
صفر	,٣٠	صفر	−١٥٠٠	٢٢٥٠٠٠٠	٦٧٥٠٠٠
١٠٠٠	,٢٥	٢٥٠	−٥٠٠	٢٥٠٠٠٠	٦٢٥٠٠
٢٠٠٠	,٢٠	٤٠٠	٥٠٠	٢٥٠٠٠٠	٥٠٠٠٠
٣٠٠٠	,١٥	٤٥٠	١٥٠٠	٢٢٥٠٠٠٠	٣٣٧٥٠٠
٤٠٠٠	,١٠	٤٠٠	٢٥٠٠	٦٢٥٠٠٠٠	٦٢٥٠٠٠
					التباين ٢)٢ =
المجموع	١,٠٠	$\bar{س}$=١٥٠٠			١٧٥٠٠٠٠ الانحراف = ١٣٢٢,٨٧٦

وبمقارنة النتائج التى حصلنا عليها من التوزيعات الاحتمالية الثلاثة نجد أن :

التوزيع الاحتمالى	المتوسط	الانحراف المعيارى
الأول	١٥٠٠	صفر
الثانى	١٥٠٠	٢٢٣,٦٠٧
الثالث	١٥٠٠	١٣٢٢,٨٧٦

وهذه النتائج تؤكد تحليلنا السابق وقبل حساب الانحراف المعيارى حيث توصلنا إلى أن الخطر معدوم فى التوزيع الاحتمالى الأول (الانحراف المعيارى = صفر) ، وأن الخطر

موجود فى التوزيع الاحتمالى الثانى ولكنه محدود (الانحراف المعيارى = ٦٠٧ر٢٢٣) ، وأن الخطـر موجـود فـى التوزيـع الاحتمـالـى الـثـالث ولكن بدرجة أكبر (الانحراف المعيارى = ١٣٢٢ر٨٧٦) .

نخلص مما سبق بنتيجة هامة ألا وهى انه عندما تكون هناك نتيجة واحدة مؤكدة فإن هذا يعنى القدرة على التنبؤ بدقة تامة بالنتيجة المتوقعة وبالتالى لا يكون هناك خطرا والأنحراف المعياري يساوى صفر ، وعندما يكون هناك عدد محدود من النتائج منها نتيجة إحتمال تحققها كبير فإن هذا يعنى أن هناك خطر محدود ويكون الانحراف المعيارى صغيرا وأخيرا فإنه عندما يكون هناك عدد كبير من النتائج مع صعوبة التنبؤ بأى من النتائج سوف يتحقق فإن قيمة الخطر تزيد عن الحالة السابقة وبالتالى يكون الانحراف المعيارى كبيراً .

ولكن فى التحليل السابق استطعنا أن نقارن بين التوزيعات الثلاثة من خلال الانحراف المعيارى لكل توزيع وذلك لأن متوسط قيمة الخسارة متساو في التوزيعات الثلاثة (١٥٠٠ جنيه) وأيضا قيمة الشيء موضوع التأمين ، ولكن كيف نستطيع المقارنة بين توزيعين يختلفان فى متوسط الخسارة أو فى قيمة الشيء أو فى القيمة المعرضة للخطر ؟ وأيضا كيف نستطيع الحكم على الانحراف المعيارى (وبالتالى على الخطر) بأنه صغيرا أم كبيرا ؟

نجيب على ذلك فنقول إن السؤالين السابقين ناتجين من أن الأنحراف المعيارى يعاب عليه أنه ينتج فى صورة رقمية مطلقة وبالتالى يصعب الحكم عليه كما يصعب المقارنة بين توزيعين أو أكثر من خلال الأنحراف المعيارى كقيمة مطلقة ، ولذلك فإننا سوف نعتمد فى قياس الخطر على مقياس آخر يسمى معامل الأختلاف Coefficient of variation

حيث :

$$\text{معامل الأختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{متوسط قيمة الخسارة}}$$

ويرى البعض أنه يجب قسمة الأنحراف المعيارى على أقصى قيمة معرضة للخطر أو علي قيمة الشيء في حالة عدم توافر أقصى قيمة معرضة للخطر (وبالتالى فإن معامل الاختلاف في هذه الحالة يكون عبارة عن مقياس نسبى لوحدة الخطر الواحدة التى قيمتها جنيه واحدت وذلك بتحديد لكل جنيه من أقصى قيمة معرضة للخطر أو من قيمة الشيء نصيبها من الانحراف المعيارى) وفى هذه الحالة فإن معامل الاختلاف يتم تحديده كما يلى :

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{أقصى قيمة معرضة للخطر أو قيمة الشيء}}$$

و بتطبيق ذلك على بيانات التوزيعات الأحتمالية الثلاثة السابقة لحساب معامل الاختلاف نحصل على ما يلى :

جدول رقم (٧) حساب معامل الاختلاف للتوزيعات الاحتمالية الثلاثة

البيان / التوزيع الاحتمالى		الأول	الثانى	الثالث
المتوسط		١٥٠٠	١٥٠٠	١٥٠٠
أقصي قيمة معرضة للخطر		١٥٠٠	٢٥٠٠	٤٠٠٠
قيمة الشيء		٥٠٠٠	٥٠٠٠	٥٠٠٠
الانحراف المعيارى		صفر	٢٢٣,٦٠٧	١٣٢٢,٨٧٦
معامل الاختلاف باستخدام	المتوسط	صفر	,١٤٩	,٨٨٢
	اقصي قيمة معرضة للخطر	صفر	,٠٨٩	,٣٣١
	قيمة الشيء	صفر	,٠٤٥	,٢٦٥

ونلاحظ من خلال قيم معامل الاختلاف أن قيمة الخطر فى التوزيع الاحتمالى الثالث أكبر من قيمة الخطر في التوزيع الثاني وهى بدورها أكبر من قيمة الخطر فى التوزيع الأول وذلك سواء تم حساب معامل الأختلاف من خلال قسمة الانحراف المعيارى على المتوسط أو أقصى قيمة معرضة للخطر أو قيمة الشيء .

ملاحظات:

١ - يمكن الاستفادة من خصائص المتوسط الحسابى والأنحراف المعيارى فى تبسيط العمليات الحسابية الخاصة بحسابهما حيث نجد أن قسمة قيم الخسائر (س) على قيمة معينة (تسمى العامل المشترك أو ثابت الاختزال) تؤدى إلى أن :

متوسط البيانات الأصلية = متوسط البيانات بعد القسمة على العامل المشترك ×

العامل المشترك

والانحراف المعيارى للبيانات الأصلية =

الانحراف المعيارى للبيانات بعد القسمة على العامل المشترك × العامل المشترك

وبتطبيق هذه الخاصية على بيانات التوزيع الاحتمالى الثالث نحصل على البيانات التالية :-

جدول رقم (٨) حساب الانحراف المعيارى

قيمة الخسارة س	الاحتمال ح (س)	س س َ = ـــ ١٠٠٠	الخسارة الجديدة × الاحتمال ح س × ح (س)	الخسارة – المتوسط س – سَ	(الخسارة – المتوسط)^٢ (س – سَ)^٢	(س – س َ)^٢ × ح (س)
صفر	٣٠ر	صفر	صفر	– ٥ر ١	٢٥ر ٢	٦٧٥ ر
١٠٠٠	٢٥ر	١	٢٥ر	– ٥ ر	٢٥ ر	٠٦٥٢ر
٢٠٠٠	٢٠ر	٢	٤٠ر	٥ . ر	٢٥ ر	٠٥ر
٣٠٠٠	١٥ر	٣	٤٥ر	١ . ٥	٢٥ ر ٢	٣٣٧٥ر
٤٠٠٠	١٠ر	٤	٤٠ر	٢ . ٥	٢٥ ر ٦	٦٢٥ر
المجموع	٠٠ر ١		سَ = ٥ر ١			التباين σَ^٢ = ١٫٧٥ الانحراف σَ = ٣٢٢٨٧٦٪

من بيانات الجدول نجد أن متوسط البيانات المختزلة (بعد القسمة علي العامل المشترك) سَ = ١,٥

∴ متوسط البيانات الأصلية سَ = متوسط البيانات المختزلة × العامل المشترك

∴ سَ = ٥ر١ × ١٠٠٠ = ١٥٠٠ جنيه

، ∴ الانحراف المعيارى للبيانات المختزلة σَ = ٣٢٢٨٧٦ر١

∴ الانحراف المعيارى للبيانات الأصلية σ = الأنحراف المعيارى للبيانات المختزلة × العامل المشترك

= ٣٢٢٨٧٦ر١ × ١٠٠٠ = ١٣٢٢,٨٧٦

وهما نفس النتيجتين اللتين سبق الحصول عليهما بالطريقة المباشرة أى من البيانات الأصلية .

٢ - كما أن هناك صيغة أخرى مبسطة تستخدم لحساب الأنحراف المعيارى دون الحاجة إلى طرح المتوسط الحسابى $\overline{س}$ - من قيم الخسارة س وهى :

$$\text{الأنحراف المعيارى} = \sqrt{\text{مجـ } س^{٢} \times ح(س) - (\text{مجـ } س \times ح(س))^{٢}}$$

$$\text{أو} = \sqrt{\text{مجـ } س'^{٢} \times ح(س) - (\text{مجـ } س' \times ح(س))^{٢}} \times \text{العامل المشترك}$$

حيث س هى القيم الأصلية للخسارة ، س َ هى قيم الخسارة بعد قسمتها على العامل المشترك .

وبتطبيق هذه الصيغة على نفس بيانات المثال السابق نحصل على النتائج التالية:

جدول رقم (٩) حساب الانحراف المعيارى

قيمة الخسارة س	الاحتمال ح (س)	$س' = \frac{س}{١٠٠٠}$	س َ × ح(س)	س َ٢ × ح (س)
صفر	٣٠ر	صفر	صفر	صفر
١٠٠٠	٢٥ر	١	٢٥ر	٢٥ر
٢٠٠٠	٢٠ر	٢	٤٠ر	٨٠ر
٣٠٠٠	١٥ر	٣	٤٥ر	١ر٣٥
٤٠٠٠	١٠ر	٤	٤٠ر	١ر٦٠
المجموع	١ر٠٠		$\overline{س'}$ = ١,٥	٤ر٠٠

∴ متوسط البيانات الأصلية $\bar{س} = \bar{س}' \times$ العامل المشترك .

∴ $\bar{س}$ = ١,٥ × ١٠٠٠ = ١٥٠٠ جنيه

، ∴ الانحراف المعيارى= $\sqrt{مجـ (س'^2 \times (ح س')) - مجـ (س' ح (س'))^2}$ × العامل المشترك

$= \sqrt{٤ - (١,٥)^2} \times ١٠٠٠$

$= \sqrt{١,٧٥} \times ١٠٠٠ = ١,٣٢٢٨٧٦ \times ١٠٠٠ = ١٣٢٢,٨٧٦$

وهما نفس القيمتين اللتين سبق الحصول عليهما من البيانات الأصلية .

ويعيب إستخدام معامل الإختلاف أو الأنحراف المعيارى فى قياس الخطر أنهما بخلاف إحتمال الخسارة (حيث يتراوح المدى الذي يمكن أن يقع خلاله بين صفر ، واحد صحيح) فالمدى الذى يمكن أن يقعا خلاله يتراوح بين صفر ، مالانهاية وبالتالي ليس من السهل تفسيرهما وتبدو أهمية معامل الإختلاف في المقارنة بين توزيعين إحتماليين يختلفان فى القيمة المتوقعة للخسارة لأنه في هذه الحالة لا يمكن إستخدام الإنحراف المعيارى كمقياس للخطر إلا تحت شرط تساوى القيمة المتوقعة للخسارة بين التوزيعين ، ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالى :

مثال (٢)

عرض عليك شراء أحد منزلين : الأول قيمته ١٢٠٠٠٠جنيه والثانى قيمته ١٤٠٠٠٠ جنيه وكل منهما معرض لحادث حريق وتبلغ قيمة الأشياء غير القابلة للحريق ٢٠٪ وكان التوزيع الإحتمالى للخسائر كما يلى :

التوزيع الاحتمالى الأول

الخسارة	الاحتمال
صفر	٢٠ر
١٥٠٠٠	٣٠ر
٣٥٠٠٠	٢٥ر
٥٥٠٠٠	١٥ر
٧٥٠٠٠	٠٦ر
٩٥٠٠٠	٠٤ر

التوزيع الاحتمالى الثانى

الخسارة	الاحتمال
صفر	٢٠ر
٢٥٠٠٠	٣٥ر
٥٠٠٠٠	٣٠ر
٧٥٠٠٠	١٠ر
١٠٠٠٠٠	٠٥ر

فأى المنزلين تختار

الحـل : بالطبع أنه سيتم إختيار المنزل الذي تكون قيمة الخطر فيه (أى معامل الاختلاف للتوزيع الاحتمالى لخسائره) أقل ويتم ذلك على النحو التالى :

جدول رقم (١٠) الانحراف المعيارى للتوزيع الاحتمالى الأول

قيمة الخسارة س	الاحتمال ح (س)	$سَ = \frac{س}{١٠٠٠٠}$	سَ × ح(س)	(س)^{٢} × ح (س) أو سَ × ح (سَ) × سَ
صفر	,٢٠	صفر	صفر	صفر
١٥٠٠٠	,٣٠	١,٥	,٤٥٠	,٦٧٥
٣٥٠٠٠	,٢٥	٣,٥	,٨٧٥	٣,٠٦٢٥
٥٥٠٠٠	,١٥	٥,٥	,٨٢٥	٤,٥٣٧٥
٧٥٠٠٠	,٠٦	٧,٥	,٤٥٠	٣,٣٧٥
٩٥٠٠٠	,٠٤	٩,٥	,٣٨٠	٣,٦١
المجموع	١,٠٠		٢,٩٨	١٥,٢٦

∴ $\bar{س} = ٢ر٩٨ \times ١٠٠٠٠ = ٢٩٨٠٠$

$\sigma = \sqrt{١٥ر٢٦ - (٢ر٩٨)^{٢}} \times ١٠٠٠٠$

$= \sqrt{(١٥,٢٦ - ٨ر٨٨٠٤)} \times ١٠٠٠٠$

$= \sqrt{٦ر٣٧٩٦} \times ١٠٠٠٠$

$= ٢ر٥٢٥٧٨٧ \times ١٠٠٠٠ = ٢٥٢٥٧ر٨٧$

∴ أقصى قيمة معرضة للخطر = ١٢٠٠٠٠ × ٨٠ر = ٩٦٠٠٠

∴ معامل الأختلاف = $\frac{٢٥٢٥٧ر٨٧}{٩٦٠٠٠}$ = ٢٦٣ر

جدول رقم (١١) الانحراف المعيارى للتوزيع الاحتمالى الثانى

قيمة الخسارة س	الاحتمال ح (س)	$\bar{س} = \frac{س}{١٠٠٠٠}$	$\bar{س} \times$ ح(س)	$(\bar{س})^{٢} \times$ ح(س)
صفر	٢٠ر	صفر	صفر	صفر
٢٥٠٠٠	٣٥ر	١	٣٥ر	٣٥ر
٥٠٠٠٠	٣٠ر	٢	٦٠ر	١ر٢٠
٧٥٠٠٠	١٠	٣	٣٠ر	٩٠ر
١٠٠٠٠٠	٠٥ر	٤	٢٠ر	٨٠ر
المجموع	١,٠٠		١ر٤٥	٣ر٢٥

∴ $\bar{س} = ١ر٤٥ \times ٢٥٠٠٠ = ٣٦٢٥٠$

$= \sqrt{٣,٢٥ - (١,٤٥)^{٢}} \times ٢٥٠٠٠$

$= \sqrt{(٣,٢٥ - ٢,١٠٢٥)} \times ٢٥٠٠٠$

$= \sqrt{١,١٤٧٥} \times ٢٥٠٠٠$

= ١,٠٧١٢١٤ × ٢٥٠٠٠ = ٢٦٧٨٠,٣٥٧

∴ أقصى قيمة معرضة للخطر = ١٤٠٠٠٠ × ٨٠, = ١١٢٠٠٠

$∴ \text{معامل الاختلاف} = \frac{٢٦٧٨٠,٣٥٧}{١١٢٠٠٠} = ٢٣٩ر$

∴ العرض الثانى أفضل من العرض الأول لإنخفاض قيمة الخطر الخاصة به

أهمية تحديد الانحراف المعيارى للتوزيع الاحتمالى

١ - سبق أن أوضحنا أنه بمعلومية الانحراف المعيارى والمتوسط الحسابى (أو أقصى قيمة معرضة للخطر أو قيمة الشيء) فإنه يمكن تحديد قيمة الخطر للتوزيع وبالتالى يسهل المقارنة بين توزيعين إحتماليين أو أكثر .

٢ - إذا كان التوزيع الإحتمالى للخسائر يتبع التوزيع الطبيعى فإنه يمكن بأستخدام الانحراف المعيارى والمتوسط تحديد إحتمال أن قيمة الخسارة (أو مجموع الخسائر) تتراوح بين قيمتين محددتين .

٣ - إذا علم الإنحراف المعيارى والمتوسط الحسابى للتوزيع الإحتمالى فإنه يمكن بدرجة ثقة معينة تحديد إحتمال أن تنحرف قيمة الخسارة (أو مجموع الخسائر) عن المتوسط الحسابى بقيمة معينة أو أكثر منها ، فطبقا لمتباينة تشيبشيف Chebyshev ine-quality يمكن القول بأن إحتمال أن قيمة الخسارة (أو مجموع الخسائر) سوف تنحرف عن المتوسط الحسابى بمقدار ك أو أكثر من وحدات الانحراف المعيارى

هو $(\frac{١}{ك})^{٢}$ على الأكثر . ولتوضيح ذلك إذا أخذنا فى الأعتبار بيانات التوزيع الإحتمالى الثانى فى المثال السابق مباشرة حيث كان المتوسط ٣٦٢٥٠ ، والأنحراف المعيارى ٢٦٧٨٠,٣٥٧ فإنه يمكن القول بأن :

إحتمال أن قيمة الخسارة سوف تنحرف (بالزيادة أو النقص) عن المتوسط الحسابى بما قيمته ١,٥ إنحراف المعيارى علي الأقل يساوى $(\frac{١}{ك})^{٢}$ على الأكثر أى أن

$$ح\,(\bar{س} + ١٫٥\,\sigma \geq س \geq \bar{س} - ١٫٥\,\sigma) \geq (\frac{١}{ك})^{٢}$$

$$ح\,(٣٦٢٥٠ + ١٫٥ \times ٢٦٧٨٠٫٣٥٧ \geq س \geq ٣٦٢٥٠ - ١٫٥ \times ٢٦٧٨٠٫٣٥٧) \geq (\frac{١}{ك})^{٢}$$

$$ح(٣٦٢٥٠ + ٤٠١٧٠,٥٣٦ \geq س \geq ٣٦٢٥٠ - ٤٠١٧٠,٥٣٦) \geq ,٤٤٤$$

$$ح\,(٧٦٤٢٠,٥٣٦ \geq س \geq -٣٩٢٠,٥٣٦) = ,٤٤٤$$

وهذا يعنى أن إحتمال أن قيمة الخسارة تساوى أو تزيد عن ٧٦٤٢٠,٥٣٦ أو تساوى أو تقل عن ٣٩٢٠,٥٣٦ (وهى مستبعدة) يساوى ,٤٤٤

٤ - بشرط ثبات العوامل الأخرى فإن زيادة عدد الوحدات المعرضة للخطر يؤدى إلى زيادة كلا من المتوسط الحسابى والانحراف المعياري ومع الأخذ فى الاعتبار أن التباين هو مربع الانحراف المعيارى فإن زيادة عدد الوحدات المعرضة للخطر بمقدار ك من المرات من العدد القديم يزيد المتوسط الحسابى $\bar{س}$ لتصبح قيمته $ل \times \bar{س}$ وأيضا التباين $\sigma^{٢}$ تصبح قيمة $ل \times \sigma^{٢}$ وحيث أن الانحراف المعيارى هو جذر التباين فإن الانحراف المعيارى الجديد يصبح $\sqrt{ل} \times \sigma$ وهذا يعنى أن :

$$\text{قيمة الخطر القديم (معامل الاختلاف)} = \frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{المتوسط}}$$

$$= \frac{\sigma}{\bar{س}}$$

وقيمة الخطر الجديد $= \frac{\sqrt{ل} \times \sigma}{ل \times \bar{س}}$ حيث ل $= \frac{\sim ٢}{\sim ١} = \frac{\text{عدد الوحدات الجديدة}}{\text{عدد الوحدات القديمة}}$

$$= \frac{\sigma}{\bar{س}} \times \frac{١}{\sqrt{ل}}$$

$$= \frac{\text{قيمة الخطر القديم}}{\sqrt{ل}} = \frac{\text{قيمة الخطر القديم}}{\sqrt{\frac{\text{عدد الوحدات الجديدة}}{\text{عدد الوحدات القديمة}}}}$$

∴ قيمة الخطرالقديم تنخفض بمعامل قيمته تساوي الجذر التربيعي للنسبة بين عدد الوحدات الجديدة وعدد الوحدات القديمة ، ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالى :

مثال(٣)

شركة الهدى لنقل المحاصيل الزراعية لديها ٤ سيارات ومن خلال التوزيع الاحتمالى لمجموع قيم الخسائر السنوية تبين لنا أن المتوسط ٢٠٠٠ والأنحراف المعيارى ٣٥٠٠ ، فإذا علمت أن الشركة قررت شراء ٣٢ سيارة أخرى ، فما تأثير ذلك على قيمة الخطر .

الحل :

∴ قيمة الخطر القديم $= \frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{المتوسط}} = \frac{٣٥٠٠}{٢٠٠٠} = ١,٧٥$

∴ معامل الزيادة فى عدد السيارات $= \frac{\text{عدد السيارات الجديدة}}{\text{عدد السيارات القديمة}} = \frac{٣٦}{٤} = ٩$

∴ متوسط مجموع الخسائر الجديد = ٢٠٠٠× ٩ = ١٨٠٠٠

∴ الانحراف المعيارى الجديدة = ٣٥٠٠ × $\sqrt{٩}$

= ٣٥٠٠ × ٣ = ١٠٥٠٠

∴ قيمة الخطر الجديدة = $\frac{١٠٥٠٠}{١٨٠٠٠}$ = ٥٨٣,

ومن الممكن الوصول لهذه النتيجة مباشرة من خلال قسمة الخطر القديمة على جذر معامل الزيادة .

∴ قيمة الخطر القديمة = $\frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{المتوسط}}$ = $\frac{٣٥٠٠}{٢٠٠٠}$ = ١,٧٥

∴ قيمة الخطر الجديدة = $\frac{\text{قيمة الخطر القديم}}{\sqrt{\text{معامل الزيادة}}}$

= $\frac{١,٧٥}{\sqrt{\frac{٣٦}{٤}}}$

= $\frac{١,٧٥}{\sqrt{٩}}$

= $\frac{١,٧٥}{٣}$ = ٥٨٣ر

وهى نفس النتيجة السابق الحصول عليها .

وتفيد النتيجة السابقة فى تحديد عدد الوحدات اللازمة لتخفيض قيمة الخطر حتى يصل إلى قيمة معينة كما يتضح من المثال التالى :

مثال (٣)

شركة الهدى لنقل المحاصيل الزراعية لديها ٤ سيارات ، متوسط مجموع الخسائر السنوية لها ٢٠٠٠ جنيه ، الانحراف المعيارى ، ٣٥٠٠ ، ما هو عدد السيارات اللازمة لتخفيض الخطر بمقدار ٨٠٪

الحل :

∴ قيمة الخطر القديمة = $\frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{المتوسط}} = \frac{٣٥٠٠}{٢٠٠٠} =$ ١٫٧٥

وحيث أن تخفيض الخطر بمقدار ٨٠٪ يعنى أن تصبح قيمته ٢٠٪ أى

$= ١٫٧٥ \times \frac{٢٠}{١٠٠} =$,٣٥

∴ قيمة الخطر الجديدة = $\frac{\text{قيمة الخطر القديم}}{\sqrt{\text{معامل الزيادة}}}$

٣٥ر = $\frac{1.75}{\sqrt{ل}}$

٣٥ر = $\frac{1.75}{\sqrt{\frac{\sim ٢}{٤}}}$ بضرب الطرفين فى الوسطين

٣٥ر × $\sqrt{\frac{\sim ٢}{٤}}$ = 1.75   وبتربيع الطرفين

$$\text{٣٫١٢٢ر٠} \times \frac{\text{٢}\sim}{\text{٤}} = \text{٣٫٠٦٢٥}$$

$$\text{٠٣٠٦٢٥ر٠} \times \sim\text{٢} = \text{٣ر٠٦٢٥}$$

$$\therefore \sim\text{٢} = \frac{\text{٣٫٠٦٢٥}}{\text{٠٣٠٦٢٥ر٠}} = \text{١٠٠}$$

حيث $\sim_{\text{٢}}$ تمثل عدد الوحدات الجديدة الذى يؤدى إلى تخفيض الخطر من ١٫٧٥ إلى ٣٥ر.

أسئلة على الوحدة الثالثة عشرة

١ - تتوقف قيمة الخطر على عدد النتائج المتوقعة بالاضافة إلى إحتمالات تحقق كل نتيجة. وضح رأيك فى هذه العبارة مع ذكر أمثلة .

٢ - " لا توجد علاقة بين التوزيع الإحتمالى للخسائر والخطر " هل توافق على هذه العبارة . ولماذا .

٣ - يعتبر الإنحراف المعيارى من الأدوات الإحصائية الهامة المستخدمة فى قياس الخطر إلا أن هناك إنتقادا هاما يوجه إليه ، أذكر هذا الإنتقاد .

٤ - أذكر مميزات إستخدام معامل الإختلاف كأداة إحصائية لقياس الخطر مع تحديد الطرق المختلفة لحسابه .

٥ - أذكر أهمية تحديد الإنحراف المعيارى للتوزيع الإحتمالى .

٦ - ما هو تأثير زيادة عدد الوحدات المعرضة للخطر على قيمة الخطر .

٧ - إذا علمت أن قيمة الخطر الخاص بوحدة واحدة يساوى ٧٥, ، ما هو تأثير زيادة عدد الوحدات إلى ٢٥ وحدة على قيمة الخطر .

٨ - مصنع قيمته ٨٠٠٠٠ جنيه ، الإنحراف المعيارى لمجموع الخسائر ٢٠٠٠٠ ، إحسب قيمة الخطر .

٩ - شركة كنتاكى لديها ٣٠ فرعا متماثلا قيمة كل فرع ٤٠٠٠٠ جنيه ، الإ نحراف المعيارى لمجموع الخسائر السنوية للفروع كلها ٧٠٠٠ جنيه ، متوسط مجموع الخسائر السنوية ٢٥٠٠٠ ، ما هو تقديرك لقيمة الخطر ، وإذا أرادت الشركة إفتتاح ٩٠ فرعا آخر فما هو تأثير ذلك على كلا من متوسط مجموع الخسائر ، الانحراف المعيارى لمجموع الخسائر ، قيمة الخطر .

١٠ - فى المثال السابق إذا قررت الشركة إغلاق نصف عدد الفروع لإنخفاض قيمة المبيعات،

فما هو تأثير ذلك فى ضوء البيانات السابقة على كلا من :

متوسط مجموع الخسائر ، الانحراف المعيارى لمجموع الخسائر ، قيمة الخطر .

١١ – شركة الإيمان لنقل الركاب لديها ٤٠ سيارة قيمة كل منها ٦٠٠٠ جنيه ، متوسط مجموع الخسائر السنوية للسيارة ١٠٠٠ جنيه ، الانحراف المعيارى لمجموع الخسائر السنوية للسيارة ٢٠٠٠ جنيه ما هو تقديرك لعدد السيارات المطلوب لتخفيض قيمة الخطر بمقدار ٧٥٪ من قيمته .

١٢ – فى المثال السابق إذا قررت الشركة بيع ٢٠ سيارة فما هو تأثير ذلك على قيمة كل من :متوسط مجموع الخسائر ، الإنحراف المعيارى لمجموع الخسائر ، قيمة الخطر

١٣ – شخص يريد إستثمار أمواله ، عرض عليه شراء أحد مصنعين للملابس الجاهزة الأول قيمته ١٠٠٠٠٠ جنيه والثانى ١١٠٠٠٠ جنيه فإذا علمت أن كلا المصنعين يعطى عائد إستثمار قدره ١٤٪ سنويا وأنه بدراسة حالات الخسارة التى تعرض لها كلا المصنعين منذ إنشائهما حصلنا على التوزيعين الاحتماليين التاليين لمجموع الخسائر.

التوزيع الاحتمالى الأول لمجموع الخسائر

مجموع الخسائر	الإحتمال
صفر	,٣٠
٢٠٠٠٠	,٤٠
٣٠٠٠٠	,٢٥
٤٠٠٠٠	,٠٥

التوزيع الاحتمالى الثانى لمجموع الخسائر

مجموع الخسائر	الإحتمال
صفر	,٤٠
٢٠٠٠٠	,٣٠
٤٠٠٠٠	,٢٠
٦٠٠٠٠	,١٠

بصفتك خبيراً فى إدارة الخطر : أى المصنعين أفضل ولماذا ؟

الوحدة الدراسية الرابعة عشرة

تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر فى حالة وجود وحدة خطر واحدة ثم قياس الخطر

الوحدة الدراسية الرابعة عشرة

موضوعها : تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر السنوية فى حالة وجود وحدة خطر واحدة ثم قياس الخطر .

هـــدفها : تعريف الطالب بكيفية إعداد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر السنوية فى حالة عدم توافر التوزيع الاحتمالى لعدد وقيمة الخسارة ثم قياس الخطر.

عناصرها : تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر فى حالة وجود وحدة خطر واحدة .

- تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر فى حالة تعرض وحدة الخطر لحادث على الأكثر والخسارة ثابتة .
- تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر فى حالة تعرض وحدة الخطر لحادث على الأكثر والخسارة متغيرة .
- تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر فى حالة تعرض وحدة الخطر لأكثر من حادث والخسارة ثابتة .
- تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر فى حالة تعرض وحدة الخطر لأكثر من حادث والخسارة متغيرة .

قياس الخطر فى حالة عدم توافر التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر السنوية:-

سبق أن أوضحنا أنه قد ينتج عن مسبب الخطر الواحد عدة خسائر متتابعة ، وفى بعض الحالات يواجة الشيء المعرض للخطر عدة مسببات للخطر الواحد ، وفى حالات أخرى قد يتعرض الشيء المعرض للخطر لأكثر من حادث خلال السنة ، وأخيراً قد يكون لدى الفرد أو المنشأة عدة وحدات معرضة للخطر وكل منها معرضة لحادث أو أكثر خلال السنة ، ففى جميع الحالات السابقة يكون من الأفضل تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر خلال السنة بدلاً من تحديد التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة الواحدة .

ولكن تواجهنا عدة مشاكل عند إعداد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر السنوية من أهمها أننا نحتاج إلى عدد كبير جداً من السنوات حتى يتم إعداد توزيع إحتمالى يمكن الاعتماد عليه وذلك لأن جميع الخسائر التى تحدث خلال أى سنة يتم تجميعها وتعتبر قيمة واحدة تعبر عن أحد قيم المتغير العشوائى (مجموع الخسائر) وبالتالى فإن التوزيع الاحتمالى الذى قد نحصل عليه من خبرة ٢٠ أو ٣٠ سنة ماضية غالباً لن يعبر عما سيحدث فى المستقبل إما لتغير الاسعار وإما لتغير الظروف المحيطة بالخطر . وأيضاً قد نحتاج لإعداد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر إلى عدد كبير جداً من الوحدات المتماثلة (المنشآت) ثم تجميع خبرتها فى جدول واحد ، والمشكلة أيضاً تتمثل فى أنه يصعب توافر عدد كبير من الوحدات المتماثلة سواء فى تعرضها للخطر أو فى قيم الأشياء المعرضة للخطر فى كل منها .

وبالتالى لايكون أمامنا وسيلة أخرى لإعداد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر سوى الاعتماد على التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث والتوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة ، وسوف نوضح فيما يلى كيفية إعداد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر بمعلومية التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث والتوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة وإستخدامه فى حساب الاحتمالات المختلفة بالإضافة إلى إستخدامه فى قياس الخطر .

أولاً تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر في حالة وجود وحدة خطر واحدة:-

في هذه الحالة فإن المنشأة يكون لديها وحدة خطر واحدة (سيارة ، مصنع ، سفينة) وهذه الوحدة تكون معرضة لحادث واحد على الأكثر خلال السنة أو لأكثر من حادث خلال السنة ، وفي الحالتين فإنه يترتب على الحادث اما خسارة ثابتة في كل مرة أو تتغير قيمتها من حادث لآخر (خسارة متغيرة) ، ونوضح فيما يلي كيفية تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر في حالة وجود وحدة خطر واحدة بإستخدام التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث والتوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة في الحالات الأربع السابقة :-

١- تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر في حالة تعرض وحدة الخطر لحادث على الاكثر والخسارة ثابتة:-

في هذه الحالة نجد أن المنشأة تمتلك وحدة خطر واحدة وتكون معرضة لحادث واحد على الأكثر خلال السنة وفي حالة تحققه فإنه يترتب عليه خسارة ثابتة دائماً ونوضح من خلال المثال التالي كيفية تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر .

مثال ١ :

يمتلك شخص لوحة فنية قيمتها ٢٠٠٠ جنية ومعرضة لخطر السرقة وفيما يلي التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث والتوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة :

التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث

عدد الحوادث	الاحتمال
صفر	٨٠ر
١	٢٠ر
المجموع	١ر-

التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة

قيمة الخسارة	الاحتمال
٢٠٠٠	١ر
المجموع	١ر

المطلوب : تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر ثم قياس الخطر

الحـــل:

يتضح من التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث أن أقصى عدد حوادث هو حادث واحد وهذا يعني أنه إما ألا يحدث الحادث (بإحتمال ٨٠٪) أو أن يحدث الحادث مرة واحدة (بإحتمال ٢٠٪) ، كما يتضح من التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة أن قيمتها ٢٠٠٠ جنية بإحتمال قدرة واحد صحيح وهذا يعنى أن الخسارة تتحقق بقيمة ثابتة تمثل قيمة الشىء (خسارة كلية)، ويتم الحصول على التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر كما يلى

- عدم حدوث الحادث وهذا لا يترتب عليه خسارة = إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى صفر= ٨٠
- أن يحدث حادث واحد ويترتب عليه خسارة قيمتها ٢٠٠٠ جنيه =

إحتمال حدوث حادث واحد × إحتمال أن تكون قيمة الخسارة ٢٠٠٠ جنيه

= ٢٠ر × ٠٠ر١ = ٢٠ر

ويكون التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر كما يلى:

التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر

مجموع الخسائر	الاحتمال
صفر	٨٠ر
٢٠٠٠	٢٠ر
المجموع	١

ولقياس الخطر تتبع الخطوات السابقة لتحديد الانحراف المعيارى أولاً ثم قسمته على أقصى قيمة معرضة للخطر وذلك على النحو التالى :-

جدول رقم (١) حساب الانحراف المعيارى

مجموع الخسائر م	الاحتمال ح(م)	م×ح (م)	م٢×ح (م)
صفر	٨٠ر	صفر	صفر
٢٠٠٠	٢٠ر	٤٠٠	٨٠٠٠٠٠
المجموع	١,٠٠	٤٠٠	٨٠٠٠٠٠

$$\therefore \sigma = \sqrt{\text{مجـ (م}^{٢} \times \text{ح (م)} - [\text{مجـ (م} \times \text{ح (م))}]^{٢}}$$

$$= \sqrt{٨٠٠٠٠٠ - (٤٠٠)^{٢}}$$

$$= \sqrt{٨٠٠٠٠٠ - ١٦٠٠٠٠}$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{٦٤٠٠٠٠} = ٨٠٠$$

$$\text{معامل الاختلاف (قيمة الخطر)} = \frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{أقصى قيمة معرضة للخطر}}$$

$$= \frac{٨٠٠}{٢٠٠٠} = ٤٠,$$

٢-تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر فى حالة تعرض وحدة الخطر لحادث على الأكثر والخسارة متغيرة .

فى هذه الحالة نجد أن المنشأة تمتلك وحدة خطر واحدة ومعرضة لحادث واحد على الأكثر خلال السنة وفى حالة تحققه فإنه يترتب عليه خسارة متغيرة ، ونوضح من خلال المثال التالى كيفية تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر :

مثال ٢ :

مصنع قيمة محتويات ٥٠٠٠٠ جنيه ومعرض لحادث حريق على الأكثر خلال السنة ، وفيما يلى التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث والتوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة

التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث

عدد الحوادث	الاحتمال
صفر	٨٠ر
١	٢٠ر
المجموع	١٠٠

التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة

قيمة الخسارة	الاحتمال
٥٠٠٠	٦٠ر
١٠٠٠٠	٢٥ر
٢٠٠٠٠	١٠ر
٣٠٠٠٠	٠٣ر
٤٠٠٠٠	٠٢ر
المجموع	١,٠٠

المطلوب: تحديد التوزيع الاحتمالى المجموع الخسائر ثم قياس الخطر :-

الحل :

يتضح من التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث أن أقصى عدد حوادث هو حادث واحد وهذا يعنى أنه إما ألا يحدث الحادث (بإحتمال قدره ٨٠,) أو أن يحدث الحادث مرة واحدة (بإحتمال قدرة ٢٠ ,) ، وفى حالة حدوث الخسارة فإنها تحدث بعدة قيم وبإحتمالات مختلفة وبالتالى فإنه يتم الحصول على التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر كما يلى :-

- عدم حدوث الحادث وإحتماله ٨٠ر وهذا يعنى أن مجموع الخسائر يساوى صفر

∴ إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى صفر = ٨٠ ر

- أن يحدث حادث واحد إحتماله ٢٠ر وأن تحدث خسارة قيمتها ٥٠٠٠ جنية إحتمالها ٦٠ر

∴ إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ٥٠٠٠ = ٢٠, × ٦٠, = ١٢٠ر

- أن يحدث حادث واحد إحتماله ٢٠ , وأن تحدث خسارة قيمتها ١٠٠٠٠ جنية إحتمالها ٢٥ر٠

∴ إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ١٠٠٠٠ = ٢٠ , × ٢٥, = ٠٥٠ر

وهكذا بالنسبة لباقى قيم مجموع الخسائر حيث يتم ضرب إحتمال حدوث الحادث وهو ٢٠ , فى إحتمال الخسارة المناظرة لكل قيمة فنحصل على الاحتمالات الآتية :-

- إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ٢٠٠٠٠ = ٢٠ , × ١٠ , = ٠٢٠ر
- إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ٣٠٠٠٠ = ٢٠ , × ٠٣ , = ٠٠٦ر
- إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ٤٠٠٠٠ = ٢٠ , × ٠٢ , = ٠٠٤ر

ويكون التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر كما يلى :-

التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسارة

مجموع الخسارة	الاحتمال
صفر	,٨٠٠
٥٠٠٠	,١٢٠
١٠٠٠٠	,٠٥٠
٢٠٠٠٠	,٠٢٠
٣٠٠٠٠	,٠٠٦
٤٠٠٠٠	,٠٠٤
المجموع	١,٠٠٠

ولقياس الخطر يتم حساب الانحراف المعيارى على النحو التالى :-

جدول رقم (٢) حساب الانحراف المعيارى للتوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر

مجموع الخسارة م	الاحتمال (م)	مَ = م / ٥٠٠٠	مَ × ح (م)	مَ^٢ × ح (م)
صفر	,٨٠٠	صفر	صفر	صفر
٥٠٠٠	,١٢٠	١	,١٢٠	,١٢٠
١٠٠٠٠	,٠٥٠	٢	,١٠٠	,٢٠٠
٢٠٠٠٠	,٠٢٠	٤	,٠٨٠	,٣٢٠
٣٠٠٠٠	,٠٠٦	٦	,٠٣٦	,٢١٦
٤٠٠٠٠	,٠٠٤	٨	,٠٣٢	,٢٥٦
المجموع	١,٠٠٠		,٣٦٨	١,١١٢

∴ الانحراف المعيارى σ = $\sqrt{\text{مجـ }((\text{مَ})^2 \times \text{ح (م)}) - [\text{مجـ (مَ} \times \text{ح (م))}]^2}$ × العامل المشترك

$= \sqrt{١.١١٢ - (,٣٦٨)^2} \times ٥٠٠٠$

$= \sqrt{١.١١٢ - ١٣٥٤٢٤ر} \times ٥٠٠٠$

$= \sqrt{٩٧٦٥٧٦ر} \times ٥٠٠٠$

= ٩٨٨٢١٨٥٩٩ر × ٥٠٠٠ = ٤٩٤١,٠٩٣

∴ معامل الاختلاف (قيمة الخطر) = الانحراف المعيارى / أقصى قيمة معرضة للخطر

= ٤٩٤١.٠٩٣ / ٤٠٠٠٠ = ١٢٤ر

٣- تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر فى حالة تعرض وحدة الخطر لأكثر من حادث والخسارة ثابتة :-

فى هذه الحالة نجد أن المنشأة تمتلك وحدة خطر واحدة وتكون معرضة لأكثر من حادث خلال السنة وفى حالة تحقق أى حادث فإنه يترتب عليه خسارة ثابتة دائماً ، ونوضح من خلال المثال التالى كيفية تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر .

مثال (٣)

شركة تمتلك معرض له واجهة من الزجاج (قطعة واحدة) قيمتها ٢٠٠٠ جنية ومعرض للكسر ثلاث مرات على الأكثر خلال السنة ، وفيما يلى التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث والتوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة :

التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث

عدد الحوادث	الاحتمال
صفر	,٨٠
١	,١٤
٢	,٠٤
٣	,٠٢
المجموع	١,٠٠

التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة

قيمة الخسارة	الاحتمال
٢٠٠٠	١,٠٠
المجموع	١,٠٠

المطلوب: تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر ثم قياس الخطر

الحل:

يتضح من التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث أنه إما ألا يحدث الحادث (بإحتمال ,٨٠) وإما أن يحدث حادث واحد فقط (بإحتمال ,١٤) وإما أن يحدث حادثين (بإحتمال ,٠٤) وإما أن يحدث ٣ حوادث خلال السنة (بإحتمال ,٠٢) .

كما يتضح من التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة أنها ثابتة حيث أنه فى حالة حدوث الحادث فإن قيمة الخسارة دائماً ٢٠٠٠ جنية (بإحتمال ١.٠٠) ، ويترتب على ذلك .

– إنه فى حالة عدم حدوث أى حادث (بإحتمال ٠.٨٠) فإن مجموع الخسائر يساوى صفر

∴ إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى صفر = إحتمال عدم حدوث أى حادث = ٠,٨٠

– وإنه فى حالة حدوث حادث واحد (بإحتمال ٠.١٤) فإن مجموع الخسائر يساوى ٢٠٠٠ (بإحتمال ١.٠٠)

∴ إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ٢٠٠٠ جنية = إحتمال حدوث حادث واحد وتكون قيمته ٢٠٠٠ جنية = ٠.٨٠ × ١.٠٠ = ٠.٨٠

– وأنه فى حالة حدوث حادثين (بإحتمال ٠,٠٤) فإن مجموع الخسائر يساوى ٢٠٠٠ × ٢ = ٤٠٠٠ جنية .

∴ إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ٤٠٠٠ جنية = إحتمال حدوث حادثتين وتكون قيمة كل حادث ٢٠٠٠ جنية = ٠٤ر٠ × ١.٠٠ = ٠٤ر٠

– وأنه فى حالة حدوث ٣ حوادث (بإحتمال ٠٢ر٠) فإن مجموع الخسائر يساوى ٢٠٠٠ × ٣ = ٦٠٠٠ جنيه .

∴ إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ٦٠٠٠ جنيه = إحتمال حدوث ٣ حوادث وتكون قيمة كل حادث ٢٠٠٠ جنيه = ٠٢ر٠ × ٠٠ر١ = ٠٢ر٠ .

ونلاحظ مما سبق أن التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر يكون عبارة عن التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث مع ضرب قيم عمود عدد الحوادث فى قيمة الخسارة الثابتة هى ٢٠٠٠ فنحصل على التوزيع الاحتمالى التالى لمجموع الخسائر :

التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسارة

مجموع الخسائر	الاحتمال
صفر	٠.٨٠
٢٠٠٠	٠.١٤
٤٠٠٠	٠.٠٤
٦٠٠٠	٠.٠٢
المجموع	١.٠٠

ولقياس الخطر يتم تحديد الانحراف المعيارى أولاً ثم قسمته على أقصى قيمة معرضة للخطر وذلك على النحو التالى :-

جدول رقم (٣) حساب الإنحراف المعيارى للتوزيع الإحتمالى لمجموع الخسائر

مجموع الخسارة م	الاحتمال ح(م)	$م' = \frac{م}{٢٠٠٠}$	م' × ح (م)	م'٢ × ح (م)
صفر	,٨٠	صفر	صفر	صفر
٢٠٠٠	,١٤	١	,١٤	,١٤
٤٠٠٠	,٠٤	٢	,٠٨	,١٦
٦٠٠٠	,٠٢	٣	,٠٦	,١٨
المجموع	١,٠٠		,٢٨	,٤٨

∴ الانحراف المعيارى $\sigma = \sqrt{\text{مجـ}\ (م'^{2} \times ح\ (م')) - [\text{مجـ}\ (م' \times ح\ (م'))]^{2}}$ X العامل المشترك

$$= \sqrt{٤٨ - (٢٨,)^{٢}} \times ٢٠٠٠$$

$$= \sqrt{٤٨ - ٠٧٨٤ر} \times ٢٠٠٠$$

$$= \sqrt{٤٠١٦ر} \times ٢٠٠٠$$

$$= ٦٣٣٧١٩١٨ر٠ \times ٢٠٠٠ = ١٢٦٧,٤٣٨$$

∴ معامل الاختلاف (قيمة الخطر) = الانحراف المعيارى / أقصى قيمة معرضة للخطر

$$= \frac{١٢٦٧,٤٣٨}{٦٠٠٠} = ٢١١ر$$

٤- تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر فى حالة تعرض وحدة الخطر لأكثر من حادث والخسارة متغيرة :

فى هذه الحالة نجد أن المنشأة تمتلك وحدة خطر واحدة وتكون معرضة لأكثر من حادث خلال السنة (حادثين على الأكثر أو ثلاثة على الاكثر .... إلخ) وقيمة الخسارة الناتجة عن أى حادث تكون متغيرة أى لها توزيع إحتمالى ، ونوضح من خلال المثال التالى كيفية تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر .

مثال (٤) :

مصنع قيمة محتوياته ٥٠٠٠٠ جنية ومعرض لخطر الحريق ، وفيما يلى التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث والتوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة :

التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث		التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة	
عدد الحوادث	الاحتمال	قيمة الخسارة	الاحتمال
صفر	,٨٠	١٠٠٠٠	,٦٠
١	,١٥	٢٠٠٠٠	,٣٠
٢	,٠٥	٤٠٠٠٠	,١٠
المجموع	١,٠٠	المجموع	١,٠٠

المطلوب :- تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر .

أ- حساب إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ٥٠٠٠٠

ب- حساب إحتمال أن مجموع الخسائر يكون فى حدود ٥٠٠٠٠

جـ- حساب إحتمال أن مجموع الخسائر يزيد عن ٥٠٠٠٠

د- قياس الخطر

الحل :-

يتضح من التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث إنه إما ألا يحدث الحادث وإحتمالة ٨٠ر٠ .

وإما أن يحدث حادث واحد وإحتماله ١٥ر٠ وإما أن يحدث حادثين وإحتماله ٥٠ر٠ كما يتضح من التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة أنه فى حالة حدوث حادث واحد (إحتمالة ١٥ر٠) فإن قيمة الخسارة قد تكون ١٠٠٠٠ جنية بإحتمال ٦٠ر٠) أو ٢٠٠٠٠ بإحتمال ٣٠ر٠ أو ٤٠٠٠٠ بإحتمال ١٠ر٠ وفى حالة حدوث حادثين (إحتماله ٠٫٠٥) فإن قيمة الخسارة الناتجة عن الحادثين إما أن تكون قيمتها :

١٠٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ أى مجموع الخسائر ٢٠٠٠٠ وإحتمال ذلك هو ,٦٠ × ,٦٠ = ,٣٦

أو ١٠٠٠٠ ، ٢٠٠٠٠ أى مجموع الخسائر ٣٠٠٠٠ وإحتمال ذلك هو ,٦٠ × ,٣٠ = ,١٨

أو ١٠٠٠٠ ، ٤٠٠٠٠ أى مجموع الخسائر ٥٠٠٠٠ وإحتمال ذلك هو ,٦٠ × ,١٠ = ,٠٦

أو ٢٠٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ أى مجموع الخسائر ٣٠٠٠٠ وإحتمال ذلك هو ,٣٠ × ,٦٠ = ,١٨

أو ٢٠٠٠٠ ، ٢٠٠٠٠ أى مجموع الخسائر ٤٠٠٠٠ وإحتمال ذلك هو ,٣٠ × ,٣٠ = ,٠٩

أو ٢٠٠٠٠ ، ٤٠٠٠٠ أى مجموع الخسائر ٦٠٠٠٠ وإحتمال ذلك هو ,٣٠ × ,١٠ = ,٠٣

أو ٤٠٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ أى مجموع الخسائر ٥٠٠٠٠ وإحتمال ذلك هو ,١٠ × ,٦٠ = ,٠٦

أو ٤٠٠٠٠ ، ٢٠٠٠٠ أى مجموع الخسائر ٦٠٠٠٠ وإحتمال ذلك هو ,١٠ × ,٣٠ = ,٠٣

أو ٤٠٠٠٠ ، ٤٠٠٠٠ أى مجموع الخسائر ٨٠٠٠٠ وإحتمال ذلك هو ,١٠ × ,١٠ = ,٠١

وحيث أن النتائج السابقة تمثل جميع النتائج الممكنة فإنه يمكن عرضها فى الجدول التالى .

جدول رقم (٥) التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر

عدد الحوادث	مجموع الخسائر	طرق وإحتمالات حدوثها
صفر	صفر	عدم حدوث أى حادث وإحتماله ٠ر٨٠ .
١	١٠٠٠٠	حدوث حادث واحد وأن يترتب عليه خسارة قيمتها ١٠٠٠٠ جنية = ٠.١٥ × ٠ر٦٠ = ٠ر٠٩٠
١	٢٠٠٠٠	حدوث حادث واحد وأن يترتب عليه خسارة قيمتها ٢٠٠٠٠ جنية = ٠ر١٥ × ٠ر٣٠ = ٠ر٠٤٥
١	٤٠٠٠٠	حدوث حادث واحد وأن يترتب عليه خسارة قيمتها ٤٠٠٠٠ = ٠ر١٥ × ٠ر١٠ = ٠ر٠١٥
٢	٢٠٠٠٠	حدوث حادثين وأن ينتج عن الأول خسارة ١٠٠٠٠ والثانى خسارة ١٠٠٠٠ = ٠ر٠٥×٠ر٦٠×٠ر٦٠ = ٠ر٠١٨
٢	٣٠٠٠٠	حدوث حادثين وأن ينتج عن الأول خسارة ١٠٠٠٠ والثانى خسارة ٢٠٠٠٠ = ٠ر٠٥×٠ر٦٠×٠ر٣٠ = ٠ر٠٠٩
٢	٥٠٠٠٠	حدوث حادثين وأن ينتج عن الأول خسارة ١٠٠٠٠ والثانى خسارة ٤٠٠٠٠ = ٠ر٠٥×٠ر٦٠×٠ر١٠ = ٠ر٠٠٣
٢	٤٠٠٠٠	حدوث حادثين وأن ينتج عن الأول خسارة ٢٠٠٠٠ والثانى خسارة ٢٠٠٠٠ = ٠ر٠٥×٠ر٣٠×٠ر٣٠ = ٠ر٠٠٤٥
٢	٣٠٠٠٠	حدوث حادثين وأن ينتج عن الأول خسارة ٢٠٠٠٠ والثانى خسارة ١٠٠٠٠ = ٠ر٠٥×٠ر٣٠×٠ر٦٠ = ٠ر٠٠٩٠
٢	٦٠٠٠٠	حدوث حادثين وأن ينتج عن الأول خسارة ٢٠٠٠٠ والثانى خسارة ٤٠٠٠٠ = ٠ر٠٥×٠ر٣٠×٠ر١٠ = ٠ر٠٠١٥
٢	٨٠٠٠٠	حدوث حادثين وأن ينتج عن الأول خسارة ٤٠٠٠٠ والثانى خسارة ٤٠٠٠٠ = ٠ر٠٥×٠ر١٠×٠ر١٠ = ٠ر٠٠٠٥
٢	٥٠٠٠٠	حدوث حادثين وأن ينتج عن الأول خسارة ٤٠٠٠٠ والثانى خسارة ١٠٠٠٠ = ٠ر٠٥×٠ر١٠×٠ر٦٠ =٠ر٠٠٣٠
٢	٦٠٠٠٠	حدوث حادثين وأن ينتج عن الأول خسارة ٤٠٠٠٠ والثانى خسارة ٢٠٠٠٠ = ٠ر٠٥×٠ر١٠×٠ر٣٠ = ٠ر٠٠١٥
المجموع		١,٠٠

وبتجميع الاحتمالات الخاصة بالقيم المتساوية لمجموع الخسائر نحصل على التوزيع الاحتمالى التالى :

جدول رقم (٥) التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر

مجموع الخسائر	الاحتمال
صفر	٨٠ ,
١٠٠٠٠	٠٩٠ ,
٢٠٠٠٠	٠٦٣ ,
٣٠٠٠٠	٠١٨ ,
٤٠٠٠٠	٠١٩٥ ,
٥٠٠٠٠	٠٠٦ ,
٦٠٠٠٠	٠٠٣ ,
٨٠٠٠٠	٠٠٠٥,
المجموع	١,٠٠

ومن التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر يمكن حساب الاحتمالات المطلوبة حيث

- إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ٥٠٠٠٠ = ٠٠٦ ,

- إحتمال أن مجموع الخسائر يكون فى حدود ٥٠٠٠٠ = إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى أو يقل عن ٥٠٠٠٠

= ٠٠٦ , + ٠١٩٥ , + ٠١٨ , ٠٦٣ , + ٠٩٠ , + ٨٠ , = ٩٩٦٥ ,

- إحتمال أن مجموع الخسائر يزيد عن ٥٠٠٠٠ = إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى أو يزيد عن ٦٠٠٠٠

= ٠٠٣, + ٠٠٠٥ , = ٠٠٣٥ ,

ولقياس الخطر يتم حساب الانحراف المعيارى وذلك على النحو التالى :

جدول رقم (١٧) حساب الانحراف المعيارى للتوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر

مجموع الخسارة م	الاحتمال ح (م)	مَ = م / ١٠٠٠٠	مَ X ح (م)	مَ^٢ X ح (م)
صفر	ر٨٠	صفر	صفر	صفر
١٠٠٠٠	ر٠٩٠	١	ر٠٩٠	ر٠٩٠
٢٠٠٠٠	ر٠٦٣	٢	ر١٢٦	ر٢٥٢
٣٠٠٠٠	ر٠١٨	٣	ر٠٥٤	ر١٢٦
٤٠٠٠٠	ر٠١٩٥	٤	ر٠٧٨	ر٣١٢
٥٠٠٠٠	ر٠٠٦	٥	ر٠٣٠	ر١٥٠
٦٠٠٠٠	ر٠٠٣	٦	ر٠١٨	ر١٠٨
٨٠٠٠٠	ر٠٠٠٥	٨	ر٠٠٤	ر٠٣٢
المجموع	١ر٠٠		ر٤	١ر١٠٦

∴ المتوسط مَ = مجـ (مَ X ح (مَ)) X العامل المشترك = ر٤ X ١٠٠٠٠ = ٤٠٠٠

∴ الانحراف المعيارى σ م = $\sqrt{\text{مجـ (مَ}^{٢} \text{ X ح (مَ))} - [\text{ مجـ (مَ X ح (مَ)) }]^{٢}}$

= $\sqrt{١ر١٠٦ - (ر٤)^{٢}}$ X ١٠٠٠٠

= $\sqrt{١ر١٠٦ - ر١٦}$ X ١٠٠٠٠

= $\sqrt{ر٩٤٦}$ X ١٠٠٠٠

∴ σ م = ٩٧٢٦٢٥٣١٣ر X ١٠٠٠٠ = ٩٧٢٦ر٢٥٣

∴ معامل الاختلاف (قيمة الخطر) = $\frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{المتوسط}}$

= $\frac{٩٧٢٦ر٢٥٣}{٤٠٠٠}$ = ٢ر٤٣٢

أو معامل الاختلاف (قيمة (قيمة الخطر) = $\frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{أقصى قيمة معرضة للخطر}}$

= $\frac{٩٧٢٦ر٢٥٣}{٨٠٠٠٠}$ = ١٢٢ر

ملاحظة هامة:

يمكن قياس الخطر بطريقة مبسطة فى حالة وجود توزيع إحتمالى لعدد الحوادث وتوزيع إحتمالى لقيمة الخسارة (تعدد الحوادث وتغير قيمة الخسارة) دون الحاجة إلى الحصول على التوزيع الاحتمالى الخسائر (خاصة إذا لم يكن مطلوباً تحديد التوزيع أو إستخدمه فى حساب إحتمالات معينة خاصة بمجموع الخسائر) وذلك من خلال إستخدام العلاقة التالية :

متوسط التوزيع الاحتمالى الخسائر =

(متوسط توزيع عدد الحوادث X متوسط توزيع قيمة الخسارة) X عدد الوحدات

أى أن $\bar{م}$ = ($\bar{\sim}$ X $\bar{س}$) X $\sim$ (١)

حيث $\bar{م}$ = متوسط التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر .

$\bar{\sim}$ = متوسط التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث (معدل تكرار الحادث)

$\bar{س}$ = متوسط التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث (معدل تكرار الحادث)

~ = عدد الوحدات المعرضة للخطر .

كما أن الانحراف المعيارى للتوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر =

√[(متوسط عدد الحوادث X تباين قيمة الخسارة) + (مربع متوسط الخسارة X تباين عدد الحوادث)] X ~

أى أ ~ : $\sigma_م$ = √[(~ X $\sigma^2_س$) + ($\bar{س}^2$ X $\sigma^2_{\sim}$)] X ~

ويحساب قيم $\bar{\sim}$ ، $\sigma^2_{\sim}$ ، $\bar{س}$ ، $\sigma^2_س$ من بيانات التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر فى المثال السابق نحصل على ما يلى :

جدول رقم (١٨) حساب المتوسط والانحراف المعيارى لعدد الحوادث

عدد الحوادث ~	الاحتمال ح (~)	~ X ح~	~² X ح~
صفر	٨٠ر	صفر	صفر
١	١٥ر	١٥ر	١٥ر
٢	٠٥ر	١٠ر	٢٠ر
المجموع	١ر٠٠	٢٥ر	٣٥ر

∴ $\bar{\sim}$ = مجـ (~ X ح (~))

∴ $\bar{\sim}$ = ٢٥ر

∴ = √(مجـ (~² X ح (~)) − [مجـ (~ X ح (~))]²)

= √(٣٥ر − (٢٥ر)²)

= √(٣٥ر - ٠٦٢٥ر)

∴ σ~ = √٢٨٧٥ر = ٥٣٦١٩٠٢٦٤ ر

جدول رقم (١٩) حساب المتوسط والانحراف المعيارى لقيمة الخسارة

قيمة الخسارة س	الاحتمال ح (س)	س/ = س / ١٠٠٠٠	س/ X ح (س/)	س/² X ح (س)
١٠٠٠٠	٦٠ر	١	٦٠ر	٦٠ر
٢٠٠٠٠	٣٠ر	٢	٦٠ر	١ر٢٠
٤٠٠٠٠	١٠ر	٣	٤٠ر	١ر٦٠
المجموع	١ر٠٠	٢٥ر	١ر٦٠	٣ر٤٠

∴ س̄ = مجـ (سَ X ح (سَ)) X العامل المشترك

∴ س̄ = ١ر٦٠ X ١٠٠٠٠ = ١٦٠٠٠

∴ σس = مجـ (سَ² X ح (س)) - (مجـ سَ X ح (سَ))²

= √(٣ر٤٠ - (١ر٦٠)²) X ١٠٠٠٠

= √(٣ر٤ - ٢ر٥٦) X ١٠٠٠٠

= √٨٤ر X ١٠٠٠٠

∴ σ س = ٩١٦٥١٥١٣٩ر X ١٠٠٠٠ = ٩١٦٥ر١٥١

∴ م̄ = ~̄ X س̄ X ~

∴ م̄ = ٢٥ر X ١٦٠٠٠ X ١ = ٤٠٠٠

حيث ~ تمثل عدد الوحدات المعرضة للخطر وهى فى هذا المثال وحدة واحدة

∴ σ م = √[(~̄ X σ س^٢) + (س̄^٢ X σ ~^٢)] X ~

= √(٢٥ر X ١٥١ر٩١٦٥)^٢ X (١٦٠٠٠ X ٥٣٦١١٩٠٢٦٤ر)^٢ X ١

= √٢١٠٠٠٠٠٠ + ٧٣٦٠٠٠٠٠

∴ σ م = √٩٤٦٠٠٠٠٠ = ٩٧٢٦ر٢٥٣

وهى نفس النتائج السابق الحصول عليها

أسئلة على الوحدة الدراسية الرابعة عشرة

(١) شركة الحمد للنقل السياحى لديها سيارة مكيفة تبلغ قيمتها ٢٠٠٠٠٠ جنيه وفيما يلى بيان عن التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث والتوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة الواحدة :

التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث		التوزيع الاحتمالى لعدد الخسارة	
عدد الحوادث	الاحتمال	قيمة الخسارة	الاحتمال
صفر	٧٠ر	١٠٠٠٠	٨٠ر
١	٢٥ر	٢٠٠٠٠	١٥ر
٢	٠٥ر	٣٠٠٠٠	٠٥ر

المطلوب : تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر

- حساب إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية يساوى ٥٠٠٠٠ جنيه
- حساب إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية يساوى ٥٠٠٠٠ جنيه على الأقل
- حساب إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية يساوى أقل من ٥٠٠٠٠ جنيه
- قياس الخطر .

(٢) شركة الخليج لبيع اللوحات الفنية لديها معرض له واجهة من الزجاج قيمتها ٥٠٠٠ جنيه، وفيما يلى بيان عن التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث والتوزيع الاجمالى لقيمة الخسارة سنوياً :

التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث

عدد الحوادث	الاحتمال
صفر	٧٠ر
١	٢٠ر
٢	٠٨ر
٣	٠٢ر

التوزيع الاحتمالى لعدد الخسارة

قيمة الخسارة	الاحتمال
٥٠٠٠	١ر٠٠

المطلوب : تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر السنوية

– حساب إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية لايقل ١٠٠٠٠ جنيه .

– حساب إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية يزيد عن ١٠٠٠٠جنيه .

– حساب إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية يساوى ١٥٠٠٠ جنيه

– قياس الخطر .

(٣) فيما يلى « بيان عن التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر السنوية لسيارات شركة الضياء للنقل السياحى :

مجموع الخسائر	صفر	٥٠٠	١٠٠٠	٥٠٠٠	١٠٠٠٠	٢٥٠٠٠	٥٠٠٠٠	المجموع
الاحتمال	٨٠ر	١٥ر	٠٣ر	٠١ر	٠٠٧ر	٠٠٢ر	٠٠١ر	١ر٠٠

– ماهو إحتمال أن تتعرض الشركة لخسارة فى العام القادم

– ماهو إحتمال أن تتعرض الشركة لخسائر مجموعها ٥٠٠٠ جنيه على الأقل .

– ماهو متوسط مجموع الخسائر (القيمة المتوقعة لمجموع الخسائر السنوية)

- إذا كان الانحراف المعيارى هو مبلغ ٢٢٠٠ جنيه ماهو تقديرك لقيمة الخطر .

- إذا كان معدل تكرار الحوادث المتوقع ٥ر فما هو تقديرك لمتوسط الخسارة الواحدة.

- حدد أقصى خسارة ممكنة .

- حدد أقصى خسارة محتملة متخذاً معيار أقل من ١٪.

الوحدة الدراسية الخامسة عشر

تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر فى حالة وجود عدة وحدات للخطر ثم قياس الخطر

الوحدة الدراسية الخامسة عشر

موضوعها : تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر فى حالة وجود عدة وحدات للخطر ثم قياس الخطر .

هدفها : تعريف الطالب بكيفية إعداد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر وحساب متوسطة وتبانيه فى حالة وجود أكثر من وحدة خطر.

عناصرها :

- حساب متوسط وتباين عدد الحوادث لوحدة خطر واحدة .
- حساب متوسط وتباين قيمة الخسارة لوحدة خطر واحدة .
- حساب متوسط وتباين مجموع الخسائر لوحدة خطر واحدة .
- حساب متوسط وتباين مجموع الخسائر لعدة وحدات خطر .

تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر فى حالة وجود عدة وحدات للخطر :

فى هذه الحالة يكون لدى المنشأة العديد من وحدات الخطر المتماثلة (سيارات، سفن، طائرات، منازل) وكل وحدة تكون معرضة لحادث واحد على الأكثر خلال السنة أو الأكثر من حادث خلال السنة، وفى كلتا الحالتين فإنه يترتب على الحادث إما خسارة ثابتة فى كل مرة أو تتغير قيمتها من حادث لآخر (خسارة متغيرة)، وفى حالة وجود عدة وحدات للخطر فإنه يصعب تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر بالطريقة السابقة ولكن تستخدم طرق تقريبية أخرى لتحديده منها:

١- التقريب باستخدام التوزيع الطبيعى The mormal approximation

٢- التقريب باستخدام طريقة تشيبشيف The chebyshev method

٣- التقريب باستخدام آلين ديوفال The Allen- Duvall method

٤- التقريب باستخدام دالة القوى الطبيعية The mormal power method

٥- التقريب باستخدام توزيع ت The student T distribution

٦- التقريب باستخدام متسلسلة إدجورث Edgeworth series

٧- التقريب باستخدام طريقة جونسون وآخرين.

٨- التقريب باستخدام طريقة بومان - شنتون.

٩- التقريب باستخدام طريقة كارل بيرسون.

١٠- التقريب باستخدام طريقة المحاكاة Simulation

١١- التقريب باستخدام بعض الطرق الرياضية الأخرى التى تعتمد على عمليات التكامل.

ومع توافر الحاسبات الآلية وظهور أجيال جديدة تتميز بالسرعة الفائقة لإجراء العمليات الحسابية بالاضافة إلى القدرة الهائلة لتخزين البيانات وبكتابة برنامج بسيط يمكن الوصول إلى التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر (دون تحديد شكل أو إسم التوزيع) وذلك بمعلومية المتوسط والتباين.

وقد توصل Hon- shiang lau إلى العزوم الأربعة الأولى للتوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر لوحدة واحدة وأثبت أن:

المتوسط $\bar{\text{م}} = \bar{\sim} \times \bar{\text{س}}$

والتباين $\sigma^2_{\text{م}} = \bar{\sim} \times \sigma^2_{\text{س}} + \sigma^2_{\sim} \times \bar{\text{س}}$

وقد توصل : Thomas A . Aiuppa إلى العزوم الأربعة الأولى للتوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر لعدة وحدات وأثبت أن

متوسط مجموع الخسائر $\bar{\text{م}}_{\sim} = (\bar{\sim} \times \bar{\text{س}}) \times \sim$

وتباين مجموع الخسائر $\sigma^2_{\text{م}\sim} = (\bar{\sim} \times \sigma^2_{\text{س}} + \sigma^2_{\sim} \times \bar{\text{س}}^2) \times \sim$

حيث $\sim$ عدد الوحدات المعرضة للخطر .

وتفيد المعادلتان السابقتان فى قياس الخطر فى حالة توافر عدد كبير من الوحدات المعرضة للخطر سواء كانت كل وحدة معرضة لحادث على الأكثر أو لأكثر من حادث خلال السنة وسواء كانت قيمة الخسارة الناتجة عن كل حادث ثابتة أو متغيرة.

ونوضح من خلال الأمثلة التالية كيفية إستخدام البيانات الخاصة بعدد الحوادث وقيم الخسائر فى ظل توافر عدد كبير من الوحدات المعرضة للخطر فى قياس الخطر بواسطة المعادلتين الخاصتين بحسات متوسط وتباين مجموع الخسائر.

مثال (١) :

فيما يلى بيان عن التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث والتوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة لمحل لبيع اللوحات الفنية :

التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث

عدد الحوادث	الاحتمال
صفر	ر٨٠
١	ر٢٠
المجموع	١ر٠٠

التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة

قيمة الخسارة	الاحتمال
٢٠٠٠	١ر٠٠
المجموع	١ر٠٠

فإذا علمت أن المحل به ٢٢٥ لوحة وقيمة اللوحة ٢٠٠٠ جنيه، حدد قيمة الخطر.

الحل :

حتى يمكن قياس الخطر فلابد من حساب متوسط مجموع الخسائر وتباين مجموع الخسائر وهما دالتين فى متوسط وتباين توزيع عدد الحوادث وتوزيع قيمة الخسارة ويتم حسابهم على النحو التالى:

جدول رقم (١) حساب متوسط وتباين توزيع عدد الحوادث

عدد الحوادث $\sim$	الاحتمالى ح $(\sim)$	$\sim$ × ح $(\sim)$	$\sim^2$ × ح $(\sim)$
صفر	ر٨٠	صفر	صفر
١	ر٢٠	ر٢٠	ر٢٠
المجموع	١ر٠٠	ر٢٠	ر٢٠

∴ متوسط عدد الحوادث $\bar{\sim}$ = $\sim$ × ح $(\sim)$

$\bar{\sim}$ = ر٢٠

∴ تباين عدد الحوادث $\sigma^2_{\sim}$ = مجـ [$\sim^2$ × ح $(\sim)$] − [مجـ ($\sim$ × ح $(\sim)$)]^2

$$= ٢٠ر - (٢٠)^٢$$

$$\therefore \sigma^2_{\sim} = ٢٠ - ٠٤ر = ١٦ر$$

جدول رقم (٢) لحساب متوسط وتباين توزيع قيمة الخسارة

عدد الخسارة س	الاحتمالى ح (س)	س × ح (س)	$س^٢$ × ح (س)
٢٠٠٠	١٫٠٠	٢٠٠٠	٤٠٠٠٠٠٠
المجموع	١٫٠٠	٢٠٠٠	٤٠٠٠٠٠٠

∴ متوسط قيمة الخسارة $\bar{س}$ = س × ح (س)

$$\bar{س} = ٢٠٠٠$$

، ∴ تباين قيمة الخسارة $\sigma^2_{س}$ =

$$مجـ \{(س^٢ × ح (س)) - [مجـ (س × ح (س))]^٢$$

$$= ٤٠٠٠٠٠٠ - (٢٠٠٠)^٢$$

$$\sigma^2_{س} = ٤٠٠٠٠٠٠ - ٤٠٠٠٠٠٠ = صفر$$

، ∴ متوسط مجموع الخسائر لوحدة خطر واحدة $\bar{م} = \bar{\sim} × \bar{س}$

$$\therefore م_{م} = ٢٠ر × ٢٠٠٠ = ٤٠٠ \text{ جنية}$$

، ∴ تباين مجموع الخسائر لوحدة واحدة $\sigma^2 = \bar{\sim} × \sigma^2_{س} + \sigma^2_{\sim} × \bar{س}^2$

$$= ٢٠ر × صفر + ١٦ر × ٢٠٠٠^٢$$

∴ σ^2م = صفر + ١٦ر × ٤٠٠٠٠٠٠ = ٦٤٠٠٠٠

وحيث أن متوسط مجموع الخسائر لعدة وحدات =

متوسط مجموع الخسائر لوحدة واحدة × عدد الوحدات

= ٤٠٠ × ٢٢٥ = ٩٠٠٠٠

وأيضاً تباين مجموع الخسائر لعدة وحدات =

تباين مجموع الخسائر لوحدة واحدة × عدد الوحدات

= ٦٤٠٠٠٠ × ٢٢٥ = ١٤٤٠٠٠٠٠٠

وحيث أن أقصى قيمة معرضة للخطر لكل وحدة تساوى قيمة الشيء = ٢٠٠٠

فإن أقصى قيمة معرضة للخطر لعدد ٢٢٥ وحدة أو قيمة الشئ

= ٢٠٠٠ × ٢٢٥ = ٤٥٠٠٠٠

∴ قيمة الخطر (معامل الاختلاف) = $\frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{متوسط مجموع الخسائر}}$

$= \frac{\sqrt{\sigma^2_{م}}}{م}$

$= \frac{\sqrt{١٤٤٠٠٠٠٠٠}}{٩٠٠٠٠}$

$= \frac{١٢٠٠٠}{٩٠٠٠٠} = ١٣٣٣$

أو قيمة الخطر (معامل الاختلاف) = $\frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{أقصى قيمة معرضة للخطر (قيمة الشئ)}}$

$$= \frac{١٢٠٠٠}{٤٥٠٠٠٠} = ٠٢٦٦ر$$

ملاحظة:

١- يمكن الحصول على التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر لوحدة واحدة ومنه يتم حساب المتوسط والتباين ثم بضربهما فى عدد الوحدات المعرضة للخطر نحصل على المتوسط والتباين للتوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر الخاص بعدد الوحدات المطلوب وهو ٢٢٥ وحدة وذلك كما يلى:

جدول رقم (٣) التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر

مجموع الخسائر م	الاحتمال ح (م)	م × ح (م)	م² × ح (م)
صفر ٢٠٠٠	٨٠ر ٢٠ر	صفر ٤٠٠	صفر ٨٠٠٠٠٠
المجموع	١٫٠٠	٤٠٠	٨٠٠٠٠٠

∴ متوسط مجموع الخسائر $\bar{م}$ = مجـ [م × ح (م)]

= ٤٠٠

، تباين مجموع الخسائر $\sigma^2_م$ = مجـ [م² × ح (م)] – [مجـ (م × ح (م)]²

= ٨٠٠٠٠٠ – (٤٠٠)²

= ٨٠٠٠٠٠ – ١٦٠٠٠٠ = ٦٤٠٠٠٠

∴ متوسط مجموع الخسائر لعدد ٢٢٥ وحدة = ٤٠٠ × ٢٢٥ = ٩٠٠٠٠

، تباين مجموع الخسائر لعدد ٢٢٥ وحدة =

$$١٤٤٠٠٠٠٠٠٠ = ٢٢٥ \times ٦٤٠٠٠٠$$

وهما نفس القيمتين اللتين سبق الحصول عليهما بالطريقة السابقة.

٢- كما يمكن قياس الخطر بالنسبة لوحدة واحدة حيث :

قيمة الخطر (معامل الاختلاف) لوحدة واحدة = $\frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{متوسط الخسائر}}$

$$= \frac{\sqrt{٦٤٠٠٠٠}}{٤٠٠}$$

$$= \frac{٨٠٠}{٤٠٠} = ٢$$

أو أن قيمة الخطر (معامل الاختلاف) لوحدة واحدة

$$= \frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{أقصى قيمة معرضة للخطر أو قيمة الشئ}}$$

$$= \frac{\sqrt{٦٤٠٠٠٠}}{٢٠٠٠}$$

$$= \frac{٨٠٠}{٢٠٠٠} = ٤$$

وباستخدام العلاقة : قيمة الخطر الجديد = $\frac{\text{قيمة الخطر القديم}}{\sqrt{ل}}$

$$\text{حيث ل} = \frac{\text{عدد الوحدات الجديدة}}{\text{عدد الوحدات القديمة}} = \frac{٢٢٥}{١} = ٢٢٥$$

$$\therefore \sqrt{\text{ل}} = \sqrt{٢٢٥} = ١٥$$

$$\therefore \text{قيمة الخطر الجديد} = \frac{\text{قيمة الخطر القديم}}{\sqrt{\text{ل}}}$$

$$\therefore \text{قيمة الخطر الجديد} = \frac{٢}{١٥} = ١٣٣٣ر٠$$

$$\text{أو قيمة الخطر الجديد} = \frac{٤}{١٥} = ٢٦٦ر٠$$

وهما أيضاً نفس النتيجتين اللتين سبق الحصول عليهما بالطريقتين السابقتين ولكن بطريقة مبسطة.

ومن خلال الملاحظة السابقة نصل إلى نتيجة هامة وهى :

فى حالة وجود عدد كبير من الوحدات المتماثلة المعرضة للخطر فإنه يمكن قياس الخطر دون الحصول على التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر وذلك بقياس الخطر لوحدة واحدة حيث :

قيمة الخطر لوحدة واحدة (معامل الاختلاف)

$$= \frac{\text{الانحراف المعيارى لمجموع الخسائر}}{\text{متوسط مجموع الخسائر أو مجموع أقصى قيم معرضة للخطر أو مجموع القيم}}$$

$$\text{وقيمة الخطر الجديد (لعدة وحدات)} = \frac{\text{قيمة الخطر القديم (لوحدة واحدة)}}{\sqrt{\frac{\text{عدد الوحدات الجديد}}{\text{عدد الوحدات القديم}}}}$$

وحيث أن عدد الوحدات القديم هو وحدة واحدة فإن القيمة تحت الجذر تساوى $\sqrt{\text{عدد الوحدات}}$ أى تساوى $\sqrt{ن}$.

ويتضح من خلال المثال التالى أهمية استخدام هذه العلاقة فى تبسيط أسلوب قياس الخطر

مثال (٢) شركة ومبى لديها ١٤٤ فرعاً متماثلاً قيمة محتويات كل فرع ٥٠٠٠٠ جنية وكل فرع معرض لخطر الحريق، وفيما يلى التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث والتوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة لكل فرع :

التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث

عدد الحوادث	الاحتمال
صفر	٨٠ر
١	١٥ر
٢	٠٥ر
المجموع	١٫٠٠

التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة

قيمة الخسارة	الاحتمال
١٠٠٠٠	٦٠ر
٢٠٠٠٠	٣٠ر
٤٠٠٠٠	١٠ر
المجموع	١٫٠٠

المطلوب : قياس الخطر .

الحل:

نلاحظ أن بيانات هذا المثال هى نفس بيانات مثال (٤) فى الوحدة الرابعة عشر مع إختلاف أن عدد الوحدات فى هذا المثال ١٤٤ وحدة، ويمكن حساب قيمة الخطر بثلاثة طرق:

الطريقة الأولى: تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر لوحدة واحدة أولاً وإستخدامه فى حساب م (متوسط مجموع الخسائر لوحدة واحدة)، $\sigma_{م}$ (الانحراف المعيارى لمجموع الخسائر لوحدة واحدة) ومنهما يتم

حساب $\bar{م}_{ن}$ (متوسط مجموع الخسائر لـ ن من الوحدات)، $\sigma_{م}$ (الانحراف المعيارى لمجموع الخسائر لـ ن من الوحدات) وذلك على النحو التالى :

١- تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر لوحدة واحدة ومنه يتم حساب المتوسط والانحراف المعيارى .

وقد سبق لنا تحديد هذا التوزيع والمتوسط والانحراف المعيارى (راجع مثال (٤) فى الوحدة الرابعة عشر وكان كما يلى .

جدول رقم (٤) حساب المتوسط والانحراف المعيارى للتوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر

مجموع الخسائر م	الاحتمال ح(م)	$م^{/} = \frac{م}{١٠٠٠٠}$	م/ × ح(م/)	م/^{٢} × ح(م/)
صفر	٨٠ر	صفر	صفر	صفر
١٠٠٠٠	٠٩٠ر	١	٠٩٠ر	٠٩٠ر
٢٠٠٠٠	٠٦٣ر	٢	١٢٦ر	٢٥٢ر
٣٠٠٠٠	٠١٨ر	٣	٠٥٤ر	١٦٢ر
٤٠٠٠٠	٠١٩٥ر	٤	٠٧٨ر	٣١٢ر
٥٠٠٠٠	٠٠٦ر	٥	٠٣٠ر	١٥٠ر
٦٠٠٠٠	٠٠٣ر	٦	٠١٨ر	١٠٨ر
٨٠٠٠٠	٠٠٠٥ر	٨	٠٠٤ر	٠٣٢ر
المجموع	١٠٠ر		٤ر	١٠٦ر١

∴ المتوسط $\bar{م}$ = ٤ر × ١٠٠٠٠ = ٤٠٠٠٠

، الانحراف المعيارى σ م = $\sqrt{(١٫٠٦ - (٫٤)^{٢})}$ × ١٠٠٠٠

= (١٫٠٦٠ - ٫١٦) × ١٠٠٠٠

= ٫٩٤٦ × ١٠٠٠٠

= ٫٩٧٢٦٢٥٣١٣ × ١٠٠٠٠ = ٩٧٢٦٫٢٥٣

∴ التباين $\sigma^{٢}$م = $(٩٧٢٦٫٢٥٣)^{٢}$ = ٩٤٦٠٠٠٠٠

٢- حساب المتوسط والانحراف المعيارى فى حالة وجود ١٤٤ وحدة

المتوسط مَ~ = مَ × ~

= ٤٠٠٠ × ١٤٤ = ٥٧٦٠٠٠

والتباين $\sigma^{٢}$م~ = $\sigma^{٢}$م × ~

= ٩٤٦٠٠٠٠٠ × ١٤٤ = ١٣٦٢٢٤٠٠٠٠٠

∴ الانحراف المعيارى σم~ = $\sqrt{١٣٦٢٢٤٠٠٠٠٠}$ = ١١٦٧١٥٫٠٣٨

أقصى قيمة معرضة للخطر =

أقصى قيمة معرضة للخطر لوحدة واحدة × عدد الوحدات

= ٨٠٠٠٠ × ١٤٤ = ١١٥٢٠٠٠٠

مجموع قيم الاشياء = قيمة الشئ لوحدة واحدة × ١٤٤

= ٥٠٠٠٠ × ١٤٤ = ٧٢٠٠٠٠٠

٣- قيمة الخطر (معامل الاختلاف)

= $\frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{المتوسط}}$ = $\frac{١١٦٧١٥٫٠٣٨}{٥٧٦٠٠٠}$ = ٫٢٠٢٦

أو قيمة الخطر (معامل الاختلاف)

$$= \frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{أقصى قيمة معرضة للخطر}} = \frac{116715{,}038}{11520000} = 0{,}0101$$

أو قيمة الخطر (معامل الاختلاف)

$$= \frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{مجموع قيم الأشياء}} = \frac{116715{,}038}{7200000} = 0{,}0162$$

الطريقة الثانية: حساب $\sim$ (متوسط عدد الحوادث لوحدة واحدة)، $\sigma^2_{\sim}$ (التباين أو مربع الانحراف المعيارى لعدد الحوادث) وأيضاً حساب $\bar{س}$ (متوسط قيمة الخسارة الواحدة)، $\sigma^2_{س}$ (التباين أو مربع الانحراف المعيارى لقيمة الخسارة) وإستخدامهم فى حساب $\bar{م}$ (متوسط مجموع الخسائر لوحدة واحدة)، $\sigma^2_{م}$ (التباين أو مربع الانحراف المعيارى لمجموع الخسائر لوحدة واحدة) وأخيراً حساب $\bar{م}_{\sim}$ (متوسط مجموع الخسائر لعدة وحدات)، $\sigma^2_{م_{\sim}}$ (التباين أو مربع الانحراف المعيارى لمجموع الخسائر لعدة وحدات). وذلك على النحو التالى:

١- حساب متوسط وتباين عدد الحوادث لوحدة واحدة .

جدول رقم (٥)

حساب المتوسط والانحراف المعيارى لعدد الحوادث

عدد الحوادث $\sim$	الاحتمال ح ($\sim$)	$\sim$ × ح ($\sim$)	$\sim^2$ × ح ($\sim$)
صفر	٨٠ر	صفر	صفر
١	١٥ر	١٥ر	١٥ر
٢	٠٥ر	١٠ر	٢٠ر
المجموع	١٫٠٠	٢٥ر	٣٥ر

∴ $\bar{\sim}$ = مجـ (~ × ح (~))

= ٢٥ر

، ∴ $\sigma_{\sim}$ = $\sqrt{\text{مجـ}(\sim^{٢} \times \text{ح}(\sim)) - (\text{مجـ}(\sim \times \text{ح}(\sim)))^{٢}}$

= $\sqrt{\text{٣٥ر} - (\text{٢٥ر})^{٢}}$

= $\sqrt{\text{٣٥} - \text{٠٦٢٥ر}}$

، $\sigma_{\sim}$ = $\sqrt{\text{٢٨٧٥ر}}$ = ٥٣٦١٩٠٢٦٤ر

، ∴ $\sigma^{٢}_{\sim}$ = ٢٨٧٥ ر

٢- حساب متوسط وتباين قيمة الخسارة لوحدة واحدة :

جدول رقم (٦)

حساب المتوسط والانحراف المعيارى لقيمة الخسارة

قيمة الخسائر س	الاحتمال ح (س)	س́ = س / ١٠٠٠٠	س́ × ح (س)	س́^٢ × ح (س́)
١٠٠٠٠	٦٠ر	١	٦٠ر	٦٠ر
٢٠٠٠٠	٣٠ر	٢	٦٠ر	١ر٢٠
٤٠٠٠٠	١٠ر	٤	٤٠ر	١ر٦٠
المجموع	١ر٠٠		١ر٦	٣ر٤٠

$\bar{س}$ = مجـ (س́ × ح (س́)) × العامل المشترك

= ١ر٦ × ١٠٠٠٠ = ١٦٠٠٠

، σس = √ مجـ (س̄٢ × ح (س̄)) − (مجـ (س̄ × ح (س̄))٢ × العامل المشترك

= √ ٤ر٣ − (٦ر١)٢ × ١٠٠٠٠

σس = √ ٤ر٣ − ٥٦ر٢ × ١٠٠٠٠

= √ ٨٤ر × ١٠٠٠٠ =

= ٩١٦٥١٥١٣٩ر × ١٠٠٠٠ = ٩١٦٥ر١٥١

σ٢س = ٨٤٠٠٠٠٠٠

٣- حساب متوسط وتباين دالة مجموع الخسائر لوحدة واحدة

م̄ = ن̄ × س

= ٢٥ر × ١٦٠٠٠ = ٤٠٠٠

σ٢م = ن̄ × σ٢س + س̄٢ × σ٢ن

= ٢٥ر × ٨٤٠٠٠٠٠٠ + ٢٥٦٠٠٠٠٠٠ × ٢٨٧٥ر

= ٢١٠٠٠٠٠٠ + ٧٣٦٠٠٠٠٠ = ٩٤٦٠٠٠٠٠

٤- حساب متوسط وتباين دالة مجموع الخسائرلعدة وحدات :

م̄ن = م̄ × ن

= ٤٠٠٠ × ١٤٤ = ٥٧٦٠٠٠

σ٢من = σ٢م × ن

= ٩٤٦٠٠٠٠٠ × ١٤٤ = ١٣٦٢٢٤٠٠٠٠٠

σمن = ١١٦٧١٥ر٠٣٨

أقصى قيمة معرضة للخطر =

أقصى خسارة للوحدة الواحدة × أقصى عدد حوادث × عدد الوحدات

= ٤٠٠٠٠ × ٢ × ١٤٤ = ١١٥٢٠٠٠٠

مجموع قيم الأشياء = قيمة الشئ لوحدة واحدة × عدد الوحدات

= ٥٠٠٠٠ × ١٤٤ = ٧٢٠٠٠٠٠

٥- قيمة الخطر (معامل الاختلاف)

$$= \frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{المتوسط}} = \frac{١١٦٧١٥٫٠٣٨}{٥٧٦٠٠٠} = ٫٢٠٢٦$$

أو قيمة الخطر (معامل الاختلاف)

$$= \frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{أقصى قيمة معرضة للخطر}} = \frac{١١٦٧١٥٫٠٣٨}{١١٥٢٠٠٠٠} = ٫٠١٠١$$

أو قيمة الخطر (معامل الاختلاف)

$$= \frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{مجموع قيم الأشياء}} = \frac{١١٦٧١٥٫٠٣٨}{٧٢٠٠٠٠٠} = ٫٠١٦٢$$

الطريقة الثالثة: حساب $\bar{\tilde{ }}$ (متوسط عدد الحوادث لوحدة واحدة)، $\sigma^2_{\sim}$ (التباين لعدد الحوادث لوحدة واحدة) وأيضاً حساب س (متوسط قيمة الخسارة الواحدة)، $\sigma^2_{س}$ (التباين لقيمة الخسارة لوحدة الواحدة) وإستخدامهم فى تحديد م (متوسط مجموع الخسائر لوحدة واحدة)، $\sigma^2_{م}$ (التباين لمجموع الخسائر لوحدة واحدة) وقياس الخطر لوحدة واحدة ومنه يمكن قياس الخطر لعدة وحدات باستخدام العلاقة :

$$\text{قيمة الخطر الجديد} = \frac{\text{قيمة الخطر القديم}}{\sqrt{ل}}$$

حيث ل تمثل النسبة بين عدد الوحدات الجديد وعدد الوحدات القديم ويتم ذلك على النحو التالى :

١- حساب متوسط وتباين عدد الحوادث لوحدة واحدة :

ن̄ = مجـ (ن × ح (ن))

= ٢٥ر

، ∴ σن = √ مجـ (ن² × ح (ن)) − (مجـ (ن × ح (ن)))²

= √ ٣٥ر − (٢ر٥)²

= √ ٣٥ر − ٠٦٢٥ر

، σن = √ ٢٨٧٥ر = ٥٣٦١٩٠٢٦٤ر

∴ σن² = ٢٨٧٥ ر

٢- حساب متوسط وتباين قيمة الخسارة لوحدة واحدة

س̄ = مجـ (س̄ × ح (س̄)) × العامل المشترك

= ٦ر١ × ١٠٠٠٠ = ٦٠٠٠ر١ جنية

σس = √ مجـ (س̄² × ح (س̄)) − (مجـ (س̄ × ح (س̄))² × العامل المشترك

= √ ٤ر٣ − (٦ر١)² × ١٠٠٠٠

= √ ٤ر٣ − ٥٦ر٢ × ١٠٠٠٠

= √ ٨٤ر × ١٠٠٠٠

σ س = ٩١٦٥١٥١٣٩ر × ١٠٠٠٠ = ١٥١ر٩١٦٥

$\therefore \; \sigma^{2}_{\text{س}} = ٨٤٠٠٠٠٠٠$

٣- حساب متوسط وتباين مجموع الخسارة لوحدة واحدة

$\bar{\text{م}} = \bar{\text{ن}} \times \bar{\text{س}}$

= ٢٥ر × ١٦٠٠٠ = ٤٠٠٠

$\sigma^{2}_{\text{م}} = \bar{\text{ن}} \times \sigma^{2}_{\text{س}} + \bar{\text{س}}^{2} \times \sigma^{2}_{\text{ن}}$

= ٢٥ر × ٨٤٠٠٠٠٠٠ + ١٦٠٠٠^{٢} × ٢٨٧٥ر =

٢١٠٠٠٠٠٠ + ٧٣٦٠٠٠٠٠ = ٩٤٦٠٠٠٠٠

$\therefore \; \sigma_{\text{م}}$ = ٩٧٢٦ر٢٥٣

٤- قياس الخطر لوحدة واحدة:

قيمة الخطر (معامل الاختلاف) = $\dfrac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{المتوسط}}$

= $\dfrac{٩٧٢٦ر٢٥٣}{٤٠٠٠}$ = ٢ر٤٣١٦

أو = $\dfrac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{أقصى قيمة معرضة للخطر}}$

= $\dfrac{٩٧٢٦ر٢٥٣}{٨٠٠٠٠}$ = ١٢١٦ر

أو = $\dfrac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{قيمة الشئ}}$

= $\dfrac{٩٧٢٦ر٢٥٣}{٥٠٠٠٠}$ = ١٩٤٥ر

٥- قياس الخطر لعدد ١٤٤ وحدة :

$$\therefore \text{قيمة الخطر الجديد} = \frac{\text{قيمة الخطر القديم}}{\sqrt{\text{ل}}}$$

$$= \frac{\text{٢٫٤٣١٦}}{\sqrt{\frac{\text{١٤٤}}{\text{١}}}}$$

$$= \frac{\text{٢٫٤٣١٦}}{\text{١٢}} = \text{٠٫٢٠٢٦}$$

$$\text{أو} = \frac{\text{١٫٢١٦}}{\text{١٢}} = \text{٠٫١٠١}$$

$$\text{أو} = \frac{\text{١٫٩٤٥}}{\text{١٢}} = \text{٠٫١٦٢}$$

وهى نفس النتائج التى سبق الحصول عليها بالطريقتين السابقتين ولكن بطريقة أسهل.

أسئلة على الوحدة الدراسية الخامسة عشر

١- شركة الحمد للنقل السياحى لديها سيارة مكيفة تبلغ قيمتها ٢٠٠٠٠٠ جنية وفيما يلى بيان عن التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث والتوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة الواحدة .

التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث

عدد الحوادث	الاحتمال
صفر	٧٠ر
١	٢٥ر
٢	٠٥ر

التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة

قيمة الخسارة	الاحتمال
١٠٠٠٠	٨٠ر
٢٠٠٠٠	١٥ر
٣٠٠٠٠	٠٥ر

المطلوب :

- تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر .
- حساب إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية يساوى ٥٠٠٠٠ جنيه .
- حساب إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية يساوى ٥٠٠٠٠ جنية على الأقل
- حساب إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية يساوى أقل من ٥٠٠٠٠ جنيه .
- قياس الخطر
- وإذا قررت الشركة شراء ٣ سيارات أخرى، ما هو تأثير ذلك على :

متوسط مجموع الخسائر السنوية، الانحراف المعيارى لمجموع الخسائر السنوية، قيمة الخطر .

٢- شركة الخلد لبيع اللوحات الفنية لديها معرض له واجهة من الزجاج قيمتها ٥٠٠٠ جنيه ، وفيما يلى بيان عن التوزيع الاحتمالى لعدد حوادث الكسر والتوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة سنوياً:

التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث

عدد الحوادث	الاحتمال
صفر	٧٠ر
١	٢٠ر
٢	٠٨ر
٣	٠٢ر

التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة

قيمة الخسارة	الاحتمال
٥٠٠٠	١ر٠٠

المطلوب :

– تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر

– حساب إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية لا يقل عن ١٠٠٠٠ جنيه

– حساب إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية يزيد عن ١٠٠٠٠ جنيه

– حساب إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية يساوى ١٥٠٠٠ جنيه

– قياس الخطر .

– وإذا إفتتحت الشركة معرضين آخرين بنفس المواصفات ، فما هو تأثير ذلك على متوسط مجموع الخسائر، الانحراف المعيارى لمجموع الخسائر ، قيمة الخطر.

٣– فيما يلى بيان عن التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر السنوية لسيارات شركة الضياء للنقل السياحى:

مجموع الخسائر	صفر	٥٠٠	١٠٠٠	٥٠٠٠	١٠٠٠٠	٢٥٠٠٠	٥٠٠٠٠	المجموع
الاحتمال	٨٠ر	١٥ر	٠٣ر	٠١ر	٠٠٧ر	٠٠٢ر	٠٠١ر	١ر٠٠

- ما هو إحتمال أن تتعرض الشركة لخسارة فى العام القادم .

- ما هو إحتمال أن تتعرض الشركة لخسائر مجموعها ٥٠٠٠ جنيه على الأقل .

- ما هو متوسط مجموع الخسائر (القيمة المتوقعة لمجموع الخسائر السنوية) .

- إذا كان الانحراف المعيارى هو مبلغ ٢٢٠٠ جنيه ما هو تقديرك لقيمة الخطر.

- إذا كان معدل تكرار الحوادث المتوقع ٥ر فما هو تقديرك لمتوسط الخسارة الواحدة .

الوحدة الدراسية السادسة عشر
سعر التأمين التجارى

الوحدة الدراسية السادسة عشر

موضوعها : سعر التأمين التجارى

هــــدفـهـا : تعريف الطالب بكيفية تحديد سعر التأمين التجارى ومكوناته .

عناصرها :- تحديد قسط التأمين :

- تحديد قسط التأمين الصافى
- تحديد قسط التأمين التجارى
- العمولات والمصاريف الإدارية والعمومية .

مقدمة :

سبق عند تعرضنا لعملية تسعير التـأمين أن ذكرنا أن هناك مجموعة من الشروط الواجب توافرها في السعر وهي:

- أن يكون السعر كافياً .
- ألا يكون السعر مبالغاً فيه
- أن يأخذ في الاعتبار الاختلاف في درجات الخطورة.

ونوضح في هذه الوحدة كيفية تحديد قسط التأمين

مراحل تحديد قسط التأمين التجارى:

يتم تحديد قسط التأمين من خلال مرحلتين رئيسيتين وهما :

المرحلة الأولى: تحديد قسط التأمين الصافى:

حيث يتم فيها تحديد قسط التأمين الصافى الخام أو الأولى وهو يمثل التوقع الرياضى للخسائر ثم يلى ذلك تحديد قسط التأمين الصافى النهائى وهو الذى يكفى لسداد الخسائر التى يتعرض لها المؤمن لهم آخذين في الاعتبار الانحرافات التى يمكن أن تحدث بين الخسائر الفعلية والخسائر المتوقعة ويتم ذلك من خلال إضافة مخصص للانحرافات بين الخسائر الفعلية والخسائر المتوقعة (إضافة الإنحراف المعيارى بعد ضربه في معامل معين كأن تضيف إنحراف معيارى واحد أو ٥ر١ إنحراف معيارى أو ٢ إنحراف معيارى وتتوقف قيمة هذا المعامل على درجة الثقة المطلوبة) .

المرحلة الثانية: تحديد قسط التأمين التجارى:

حيث يتم في هذه المرحلة إضافة أعباء القسط إلى القسط الصافى النهائى، وتتمثل هذه الاعباء في :

١- العمولات .

١- المصاريف الادارية والعمومية .

٣- هامش الربح .

ويتم تحديد هذه الأعباء كنسبة من القسط التجارى نفسه من خلال الخبرة العملية وذلك على النحو التالى :

١- العمولات والمصاريف الإدارية والعمومية:

يمكن تحديد نسبة العمولات والمصاريف الإدارية والعمومية إذا نظرنا إلى الجدول التالى والذى يوضح نسبة هذه العناصر خلال فترة الخبرة :

جدول يوضح نسبة العمولات والمصاريف الادارية والعمومية فى فرع الحريق

السنوات	٨٤/ ٨٥	٨٥/٨٦	٨٦/٨٧	٨٧/ ٨٨	٨٨/٨٩	المجموع	المتوسط الحسابى
نسبة العمولة	٥ر١٤٪	٣ر١٤٪	٦ر١١٪	٤ر١٧٪	٧ر١٣٪	٥ر٧١٪	٣ر١٤٪
نسبة المصايف الادارية والعمومية	٩ر٧٪	٤ر٧٪	٣ر٧٪	٤ر٥٪	٨ر٤٪	٨ر٣٢٪	٥٦ر٦٪
المجموع	٤ر٢٢٪	٧ر٢١٪	٩ر١٨٪	٨ر٢٢٪	٥ر١٨٪	٣ر١٠٤٪	٨٦ر٢٠٪

* المصدر : الكتاب الاحصائى السنوى للهيئة المصرية للرقابة على التأمين عن السنوات ٨٤/٨٥ - ٨٨/٨٩ .

ومن بيانات الجدول السابق يتضح لنا أن متوسط نسبة العمولات والمصاريف الإدارية والعمومية يبلغ ٨٦ر٢٠٪ من القسط التجارى نفسه وسوف نرمز لها بالرمز ب

٢- هامش الربح :

يمثل هامش الربح نسبة تتراوح بين ٥ر٢٪ ، ٥٪ تقريباً من القسط التجارى، ويأخذ الحد الأدنى (نظراً لأن هذه النسبة تكون من الأقساط، وأن الأقساط تصل فى معظم الاحيان إلى أضعاف رأس المال وبالتالى ستكون مرتفعة فى حالة نسبتها إلى رأس المال). وسوف نرمز لهامش الربح بالرمز جـ

فإذا رمزنا للقسط الوحيد الصافى النهائى بالرمز أ

وحيث أن جميع النسب السابقة (القسط الصافى النهائى ، المصاريف الإدارية والعمومية، العمولات، هامش الربح) تمثل نسبة من القسط التجارى نفسه فإن :

$$\text{القسط التجارى الوحيد} = \frac{\text{أ}}{١-(\text{ب}+\text{جـ})} \times \text{مبلغ التأمين}$$

وبالتعويض عن ب = ٨٦ر٢٠ ٪

وبالتعويض عن جـ = ٥ر٢ ٪

$$\therefore \text{القسط التجارى الوحيد} = \frac{\text{أ}}{١-(٢٠٨٦ر + ٠٢٥ر)}$$

$$= \frac{\text{أ}}{١ - ٢٣٣٦ر}$$

$$= \frac{\text{أ}}{٧٦٦٤ر}$$

وبالتالى فإنه يتم أولاً تحديد قسط التأمين الصافى النهائى أ وعقب ذلك يتم التعويض بها فى معادلة القسط التجارى فنحصل على القسط التجارى . ونوضح فيما يلى كيفية تحديد القسط الصافى النهائى :

تحديد قسط التأمين الصافى :

يمثل قسط التأمين الصافى القيمة المتوقعة ويتم حساب متوسط الخسائر من خلال تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر أى تحديد التوزيع الاحتمالى للمتغير م حيث :

$$\text{م} = \text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \text{س}_\text{ن}$$

$$= \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_\text{ر}$$

حيث : $\text{س}_\text{ر}$ هى المتغير العشوائى الذى يرمز إلى قيمة الخسارة

، ن هى المتغير العشوائى الذى يرمز إلى عدد الخسائر

، م هى المتغير العشوائى الذى يرمز إلى مجموع قيم الخسائر التى تحدث خلال السنة وكلا من $\text{س}_\text{ر}$ ، ن يكون لهما توزيع إحتمالى نظرى الأول الخاص بقيمة الخسارة يكون لها توزيع إحتمالى نظرى متصل والثانى الخاص بعدد الخسائر يكون له توزيع إحتمالى نظرى منفصل، وحيث أن هناك صعوبة فى إيجاد التوزيع الاحتمالى النظرى الخاص بمجموع قيم الخسائر فإننا سوف نعتمد على المعادلتين التاليتين واللتين توصل لهما Thomas A . Aiuppa لايجاد قيم متوسط وتباين هذه الدالة والذين يتم الاعتماد عليهما فى حساب قسط التأمين الصافى الخام أو الأولى وقسط التأمين الصافى النهائى وهما:

قسط التأمين الصافى الخام أو الأولى $\text{ج} = \overline{\sim} \times \bar{\text{س}} \times \text{ن}$

والانحراف المعيارى للتوزيع $\sigma_\text{م} = \sqrt{[(\sigma^2_\sim \times \bar{\text{س}}^2) + (\overline{\sim} \times \sigma^2_\text{س})]} \times \overline{\sim}$

حيث $\sigma^2_\sim$ هو تباين عدد الحوادث

$\bar{\text{س}}$ هى متوسط قيمة الخسارة

$\overline{\sim}$ هى متوسط عدد الحوادث

$\sigma^{٢}_{س}$ هى تباين قيمة الخسارة

$\tilde{ن}$ هى عدد الوثائق أو عدد الوحدات المعرضة للخطر

ونوضح من خلال بيانات المثال التالى كيفية تحديد قسط التأمين الصافى الخام أو الأولى ثم قسط التأمين الصافى النهائى تمهيداً لحساب قسط التأمين التجارى.

مثال ١ :

فيما يلى بيان عن توزيع مجموعة من الوثائق حسب عدد الحوادث خلال فترة الخبرة فى فرع الحريق :

عدد الحوادث	عدد الوثائق
صفر	١٧٥٤٩
١	١١٠٤
٢	٥٣
٣	٢
المجموع	١٨٧٠٨

وبدراسة عدد الحوادث حسب قيمة الخسارة حصلنا على التوزيع التالي:

قيمة الخسارة	صفر	٢٠٠٠-	٤٠٠٠-	٦٠٠٠-	٨٠٠٠-	١٠٠٠٠-	١٢٠٠٠-	١٤٠٠٠-	١٦٠٠٠-	١٨٠٠٠-	٢٠٠٠٠-٢٢٠٠٠
الاحتمال	٥٠٤	٣٥٢	١٨٦	٩١	٤٤	٢٠	١٠	٤	٣	١	١

المطلوب: تحديد قسط التأمين التجارى وأيضاً سعر التأمين لهذا الفرع إذا علمت أن مجموع مبالغ التأمين لهذه المجموعة من الوثائق قد بلغ ٨٥٦١٧٠٢٢١ جنيها

(أو متوسط مبلغ تأمين الوثيقة الواحدة = $\frac{٨٥٦١٧٠٢٢١}{١٨٧٠٨}$ = ٤٥٧٦٥ جنيها)

الحـــــل :

يتم أولاً تحديد متوسط وتباين عدد الحوادث ($\bar{\tilde{ن}}$ ، $\sigma^{٢}_{\tilde{ن}}$) ثم يلى ذلك تحديد متوسط وتباين قيمة الخسارة ($\bar{س}$ ، $\sigma^{٢}$) ثم إستخدامهما فى تحديد متوسط مجموع الخسائر وتباين مجموع الخسائر وأخيراً تحديد سعر التأمين وذلك على النحو التالى :

أولاً : تحديد متوسط وتباين عدد الحوادث :

عدد الحوادث $\tilde{ن}$	عدد الوثائق ك	عدد الحوادث × عدد الوثائق $\tilde{ن}$ × ك	(عدد الحوادث)^{٢} × عدد الوثائق $\tilde{ن}^{٢}$ × ك
صفر	١٧٥٤٩	صفر	صفر
١	١١٠٤	١١٠٤	١١٠٤
٢	٥٣	١٠٦	٢١٢
٣	٢	٦	١٨
المجموع	١٨٧٠٨	١٢١٦	١٣٣٤

∴ متوسط عدد الحوادث $\bar{\tilde{ن}}$ = $\frac{مجـ(\tilde{ن} \times ك)}{مجـك}$ = $\frac{١٢١٦}{١٨٧٠٨}$ = ٠ر٦٤٩٩٨٩٣

تباين عدد الحوادث $\sigma^{٢}_{\tilde{ن}}$ = $\frac{مجـ(\tilde{ن}^{٢} \times ك) - \frac{(مجـ(\tilde{ن} \times ك))^{٢}}{مجـك}}{مجـ(ك-١)}$

= $\frac{١٣٣٤ - \frac{(١٢١٦)^{٢}}{١٨٧٠٨}}{١٨٧٠٧}$ = ٠ر٠٦٧٠٨٥١١٧

ثانياً : تحديد متوسط وتباين قيمة الخسارة :

فئة الخسارة	التكرار ك	مركز فئة الخسارة س	مركز فئة الخسارة × التكرار س × ك	(مركز فئة الخسارة)^{٢} × التكرار س^{٢} × ك
صفر-	٥٠٤	١٠٠٠	٥٠٤٠٠٠	٥٠٤٠٠٠ × $١٠^{٦}$
٢٠٠٠-	٣٥٢	٣٠٠٠	١٠٥٦٠٠٠	٣١٦٨ × $١٠^{٦}$
٤٠٠٠-	١٨٦	٥٠٠٠	٩٣٠٠٠٠	٤٦٥٠ × $١٠^{٦}$
٦٠٠٠-	٩١	٧٠٠٠	٦٣٧٠٠٠	٤٤٥٩ × $١٠^{٦}$
٨٠٠٠-	٤٤	٩٠٠٠	٣٩٦٠٠٠	٣٥٦٤ × $١٠^{٦}$
١٠٠٠٠-	٢٠	١١٠٠٠	٢٢٠٠٠٠	٢٤٢٠ × $١٠^{٦}$
١٢٠٠٠-	١٠	١٣٠٠٠	١٣٠٠٠٠	١٦٩٠ × $١٠^{٦}$
١٤٠٠٠-	٤	١٥٠٠٠	٦٠٠٠٠	٩٠٠ × $١٠^{٦}$
١٦٠٠٠-	٣	١٧٠٠٠	٥١٠٠٠	٨٦٧ × $١٠^{٦}$
١٨٠٠٠-	١	١٩٠٠٠	١٩٠٠٠	٣٦١ × $١٠^{٦}$
٢٠٠٠٠-٢٢٠٠٠	١	٢١٠٠٠	٢١٠٠٠	٤٤١ × $١٠^{٦}$
المجموع	١٢١٦		٤٠٢٤٠٠٠	٢٣٠٢٤ × $١٠^{٦}$

∴ متوسط قيمة الخسارة $\bar{س} = \frac{\text{مجـ}(س \times ك)}{\text{مجـ} ك} = \frac{٤٠٢٤٠٠٠}{١٢١٦} =$ ٣٣٠٩ر٢١١ ج

، تباين قيمة الخسارة $\sigma^{٢}_{س} = \dfrac{\text{مجـ}(س^{٢} \times ك) - \left(\dfrac{(\text{مجـ}(س \times ك))^{٢}}{\text{مجـ} ك}\right)}{\text{مجـ}(ك-١)}$

$$= \dfrac{٢٣٠٢٤ \times ١٠^{٦} - \dfrac{(٤٠٢٤٠٠٠)^{٢}}{١٢١٦}}{١٢١٥} =$$ ٧٩٨٩٩٠٧ ج

وحيث أن عدد الوثائق خلال مدة الخبرة هو ١٨٧٠٨ وبالتعويض بالقيمة السابقة فى معادلتى متوسط وتباين مجموع الخسائر نحصل على :

∴ متوسط مجموع الخسائر م̄ = ∼̄ × س̄ × ∼̄

∴ م̄ = ٠ر٠٦٤٩٩٨٩٣ × ٣٣٠٩ر٢١١ × ١٨٧٠٨ = ٤٠٢٤٠٠٠ جنيها

∴ الانحراف المعيارى لمجموع الخسائر

= √[(σ²∼ × س̄²) + (∼̄ × σ²س)] × ن

σم = √[(٠ر٠٦٧٠٨٥١١٧ × ٣٣٠٩ر٢١١)² + (٠ر٠٦٤٩٩٨٩٣ × ٧٩٨٩٩٠٧)] × ١٨٧٠٨

= ٢ر٣٤٥٩٠٧٨١ × ١٠^١٠

= √١٥٣١٦٤

، ∴ القسط الصافى النهائى =

القسط الصافي الخام أو الأولى + مخصص الانحرافات

= ٤٠٢٤٠٠٠ + ١٥٣١٦٤ = ٤١٧٧١٦٤ جنيها

ويمثل هذا المبلغ مجموع الاقساط الخاصة بمجموع الوثائق كلها وعددها ١٨٧٠٨

∴ قسط التأمين للوثيقة الواحدة = ٤١٧٧١٦٤ / ١٨٧٠٨ = ٢٢٣ر٢٨٢ جنيها

∴ سعر التأمين الصافي = مجموع الخسائر بما فيها مخصص الانحرافات / مجموع مبالغ التأمين

= ٤١٧٧١٦٤ / ٨٥٦١٧٠٢٢١ = ٠ر٠٠٤٨٧٨٩

أو ∴ سعر التأمين الصافى = $\frac{\text{متوسط الخسارة بما فيها مخصص الانحرافات}}{\text{متوسط مبلغ التأمين}}$

$$= \frac{٢٢٣٫٣٨٢}{٤٥٧٦٥} = ٠٫٠٠٤٨٧٨٩$$

وحيث أن القسط الوحيد التجارى لمبلغ جنيها واحداً = $\frac{أ}{١-(ب+جـ)}$

وبالتعويض عن أ = ٠٫٠٠٤٨٧٨٩

وبالتعويض عن ب = ٢٠٫٨٦ ٪

وبالتعويض عن جـ = ٢٫٥ ٪

∴ القسط الوحيد التجارى = $\frac{٠٫٠٠٤٨٧٨٩}{١-(٠٫٢٠٨٦+٠٫٠٢٥)}$

$$= \frac{٠٫٠٠٤٨٧٨٩}{١-(٠٫٢٠٨٦+٠٫٠٢٥)}$$

$$= \frac{٠٫٠٠٤٨٧٨٩}{١-٠٫٢٣٣٦}$$

$$= \frac{٠٫٠٠٤٨٧٨٩}{٠٫٧٦٦٤} = ٠٫٠٠٦٣٦٦ = ٠٫٦٣٦٦ ٪$$

وبضرب هذه النسبة فى مبلغ تأمين الوثيقة نحصل على قسط التأمين .

أسئلة على الوحدة الدراسية السادسة عشرة

١- فيما يلى بيان عن توزيع مجموعة من وثائق تأمين السيارات التكميلى خلال فترة الدراسة حسب عدد وقيم الخسائر:

عدد الحوادث	عدد الوثائق	فئة الخسارة	عدد الخسائر
صفر	٢٠٨٤٥	صفر -	١٦٠٥
١	٢٠٥٥	٢٠٠٠ -	٨٥٧
٢	٦٠٠	٤٠٠٠ -	٥٥٥
٣	٨٥	٦٠٠٠ -	٣٢٥
٤	١٥	٨٠٠٠ -	١٥٥
		١٠٠٠٠ -	٥٥
		١٢٠٠٠ -	١٥
		١٤٠٠٠ - ١٦٠٠٠	٣

المطلـوب تحديد قسط التأمين التجارى وسعر التأمين التجارى إذا علمت أن نسبة التحميلات ٣٦ر٢٣٪ من القسط التجارى وأن مجموع مبالغ التأمين خلال فترة الخبرة قد بلغ ١٩٠٠٠٠٠٠٠ جنيها.

المراجع

أولاً : المراجع العربية

أ- الكتب:

١- أحمد جاد عبدالرحمن وآخرون ، **تأمين الحريق والحوادث العامة** ، (الكويت: الهيئة العامة للتعليم التطبيقي والتدريب، ١٩٨٦).

٢- حسين محمد السلاموني ، **إدارة الخطر والتأمين** ، (القاهرة : دار الإتحاد العربي للطباعة ، ١٩٨٨) .

٣- سمير كامل عاشور ، **الإحصاء التحليلي** ، (القاهرة : معهد الدراسات والبحوث الاحصائية ١٩٧٩).

٤- سلامة عبدالله سلامة ، **الخطر والتأمين: الأصول العلمية والعملية** ، (القاهرة : دار النهضة العربية ، ١٩٧٤) .

٥- شوقي سيف النصر سيد ، **التأمين: الأصول العلمية** والمبادىء العملية ، (القاهرة ، دار الفكر العربي ، ١٩٨٤).

٦- عادل عبدالحميد عز ، **بحوث في التأمين** ، (القاهرة: دار النهضة العربية ، ١٩٦٧).

٧- عادل عبدالحميد عز ومحمد صلاح الدين صدقي ، **التأمين ورياضياته**،(القاهرة : دار النهضة العربية ، ١٩٧٩) .

٨- محمد صلاح الدين صدقي و ممدوح حمزة أحمد، **الأساليب الكمية (١)**، (القاهرة: مركز التعليم المفتوح ، جامعة القاهرة ، ١٩٩٣) .

٩- مختار محمود الهانس ، **مبادئ التأمين بين الجوانب النظرية والاسس الرياضية** ، (الطبعة الثالثة : الإسكندرية ، الدار الجامعية للطباعة . والنشر والتوزيع ، ١٩٨٥) .

١٠- ممدوح حمزة احمد ، **النظرية الاحصائية واتخاذ القرار في التأمين والإدارة** ، (القاهرة ، دار النهضة العربية ، ١٩٩٢).

١١- ________ ، **تأمين الحريق والحوادث المتحالفة** ، (القاهرة : مركز التعليم المفتوح بجامعة القاهرة ، ١٩٩٣) .

ثانيا : المراجع الاجنبية

(a) Books:

(1) Beard R.E.et. al. ,***Risk Theory : The Stochastic Basis of Insurance,*** (2nd Edition : London , Chapman and Hall , 1978).

(2) Benjamin B. , ***General Insurance*** , (London : Heinemann, 1978).

(3) Bickilhaupt David L., ***General Insurance*** (8th Edition : Homewood, Illinois , Richard D. Irwin, Inc. , 1974).

(4) Daniel Wayne W. et. al. , ***Business Statistics: Basic Concept and Methodology,*** (3rd Edition : Boston, Houghton Mifflin Company, 1983).

(5) Doherty Neil A. , ***Corporate Risk Management : A Financial Exposition,*** (New York : Mc Graw - Hill , Inc. , 1985).

(6) Dychman Thomas R. et. al. , ***Fundamental Statistics for Business and Economics,*** (New York : Prentic Hall, Inc. , 1977).

(7) Elmawaziny Ahmed , ***A Course in Theory of Statistics , Distribution Theory*** , (Part one : cairo University Press , 1979).

(8) Fraser D. A. S. , ***Statistics : An Introduction*** , (New York : John Wiley and Sons, Inc. , 1958).

(9) Hossack I. B. et. al . , ***Introductory Statistics With Applications. In General Insurance*** , (1st Edition : London, Cambridge University Press , 1983).

(10) L. Johnson . N. and S. Kotz, ***Distributions in Statistics : Continuous Distribution*** , (New York : Houghton Mifflin Company, 1969) .

(11) Long D. John and Gregg W. Davis, ***Property and Liability Insurance Handbook*** , (Homewood , Illinois : Richord D . Irwin, Inc. , 1965).

(12) Magee H. John and Serbein N. Oscar , ***Property and Liability Insurance,*** (4th Edition : Homewood, Illinois , Richard D. Irwin , Inc. , 1967).

(13) Mayerson Allen L., ***Introduction to Insurance*** , (1st Edition : New York, The macmillan Company, 1962) .

(14) Mood Alexander M. et. al. , ***Introduction to The theory of Statistics,*** (3rd Edition : Tokyo , Mc Graw-Hill Inc. , 1974).

(15) Plain William et. al. , ***Systems of Frequency Curves*** , (London : Cambridge University Press, 1969).

(16) Riegel Robert et. al. , ***Insurance Principles and Practices Property and Liability*** , (5th Edition : New Jersey , Prentic- Hall, Inc., Englewood Liffs , 1976).

(17) Rodda H. William , ***Property and Liabity Insurance*** , (New Jersey : Prentic - Hall , Inc. , Englewood Cliffs , 1966).

(18) Seal Hilary L. , ***Mixed Poisson Processes and Risk Theory,*** (France : Institut de Sciences Actuarielles, Universite de Lausanne . 1980).

(19) Seal Milary L, ***Stochastic Theory of Risk Business*** , (2nd Edition : New York , John Wiley and Sons, Inc. , 1969).

(20) Tahy Hamdy A., ***Operations Research : An Introduction*** , (3rd Edition : New York, Macmillan Publishing Company, Inc. 1982).

(21) Williams C. Arthur, JR. And Heins Richard M. , ***Risk Management And Insurance*** (6th Edition: New York, Mc Graw-Hill Book Company, 1989).

(22) Wooddy John C., ***Risk Theory,*** (U.S.A, : Education and Examination Committee Of Actuaries, Part 5, 1973).

(23) Woodroofe Michael, ***Probability With Applications,*** (U.S.A. : Mc Graw-Hill Inc., 1975) .

(B) Periodicals:

(1) Aiuppa Thomas A., Evaluation of Pearson Curves As Approximation of the Maximum Probable Aggregate Ioss, ***Journal Of Risk And Insurance,*** (Vol. 3. 1988).

(2) Bowman And Shenton, Approximate Percentage Points For Pearson Distributions, ***Piometrika,*** (Vol. 66, 1979).

(3) Cummins J. David, A Comparative Analysis of Alternative Maximum Probable Yearly Aggregte Ioss Estimators, ***Journal of Risk And Insurance ,*** (Vol. 2. 1978) .

(4) Lau Hon-Shiang, An Effective Approach For Estimating The Aggregate Ioss of An Insurance Portfolio, ***Journal of Risk And Insurance ,*** (Vol. 3. 1984).

(c) Researchs:

(1) Kandil Mohamed Barakat, ***Credibility Theory And Experience Rating In General Insurance,*** (U.K: City University Ph. D. Dissertation, 1983).

(2) Morgan Ibrahim M., ***Credibility Theory Under The Collective Risk Model,*** (U.S.A. : University of Wisconson - Madison , Ph. D. Dissertation, 1983).

رقم الإيداع : ١٦٥٤٣ / ٢٠٠٥

I.S.B.N : 977 - 403 – 036 - 2


مركز
جامعة القاهرة
للتعليم المفتوح
تم الطبع بمطبعة
مركز
جامعة القاهرة
للتعليم المفتوح

مركز
جامعة القاهرة

